http://www.mbmaster.pl/elektrotechnika-zadania.html

Metoda potencjałów węzłowych – rozwiązany przykład

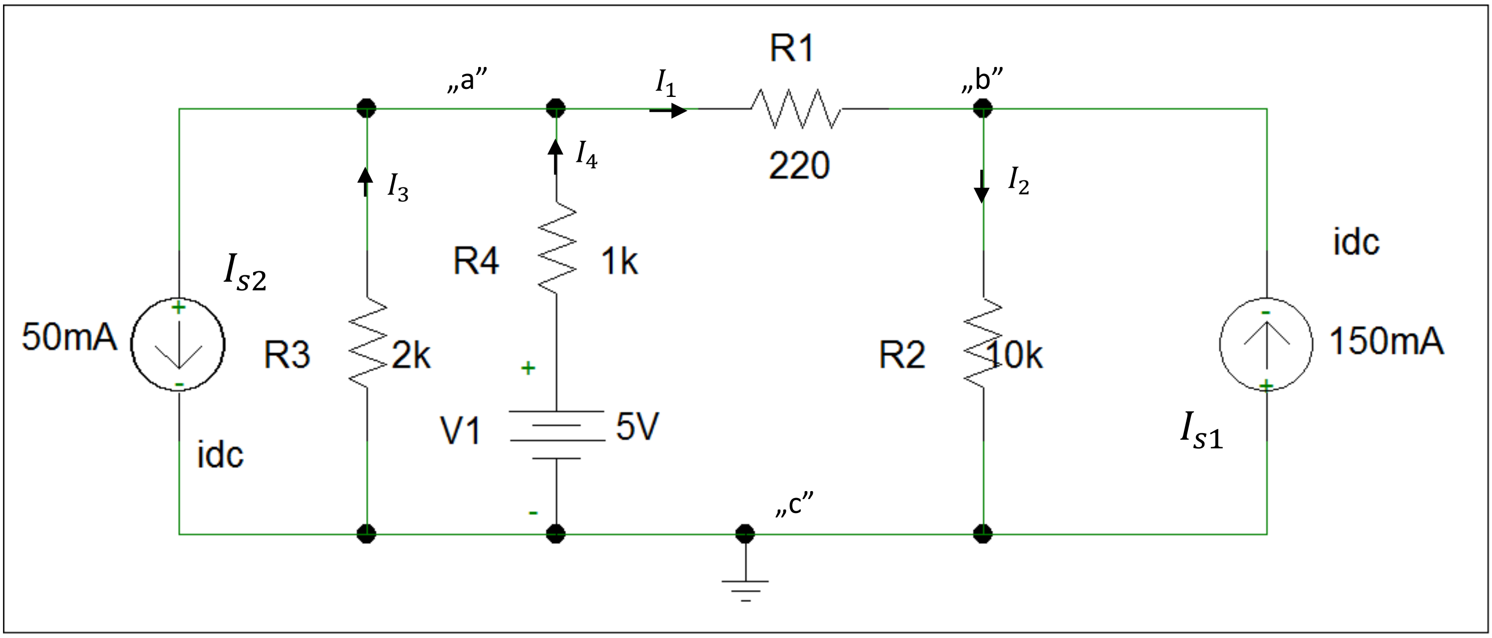
Zastosowana zostanie metoda węzłowa w celu wyliczenia prądów i napięć w gałęziach obwodu elektrycznego prądu stałego. Metoda potencjałów węzłowych opiera się na prądowym prawie Kirchhoffa. Liczba równań dla prądowego prawa Kirchhoffa i dla metody potencjałów węzłowych jest dana wzorem:

$$I.K \rightarrow n-1$$

$$n - liczba\ węzłów$$

Obwód elektryczny poniżej ma trzy węzły. Liczba równań jest więc następująca

$$KCL \rightarrow n-1=3-1=2$$



Rysunek 1. Obwód elektryczny prądu stałego.

W metodzie potencjałów węzłowych musimy założyć że jeden z węzłów ma potencjał elektryczny równy $0[V]$. Wybrany węzeł łączymy symbolicznie z potencjałem Ziemi. W tym przykładzie zakładamy że węzeł "c" ma potencjał $0[V]$.

Równanie dla węzła "a"

$$\Sigma(I_s)_a = -I_{s2} + \frac{V1}{R4} = V_a \cdot (G3+G4) - V_b \cdot G1 - V_c \cdot (G3+G4)$$

Ponieważ założyliśmy wartość potencjału węzła "c" równą zero → $V_c = 0[V]$, więc równanie na sumę prądów źródłowych w węźle "a" upraszcza się.

$$\Sigma(I_s)_a = -I_{s2} + \frac{V1}{R4} = V_a \cdot (G3 + G4) - V_b \cdot G1$$

Równanie dla węzła "b"

$$\Sigma(I_s)_b = I_{s1} = V_b \cdot (G1 + G2) - V_a \cdot G1 - V_c \cdot G2$$

Ponieważ założyliśmy wartość potencjału węzła "c" równą zero → $V_c = 0[V]$, więc równanie na sumę prądów źródłowych w węźle "b" upraszcza się.

$$\Sigma(I_s)_b = I_{s1} = V_b \cdot (G1 + G2) - V_a \cdot G1$$

Aby wyznaczyć wyrażenia na potencjały V_a i V_b musimy rozwiązać układ równań. Wyrażenie na potencjał V_a otrzymamy z równania na źródła prądowe w węźle "a".

$$-I_{s2} + \frac{V1}{R4} = V_a \cdot (G3 + G4) - V_b \cdot G1$$

$$V_a \cdot (G3 + G4) = V_b \cdot G1 - I_{s2} + V1 \cdot G4$$

$$V_a = V_b \cdot \frac{G1}{G3 + G4} - \frac{I_{s2}}{G3 + G4} + V1 \cdot \frac{G4}{G3 + G4}$$

Wstawimy teraz wyrażenie na potencjał V_a do równania na sumę prądów źródłowych w węźle "b". Jako rezultat otrzymamy wyrażenie na potencjał V_b.

$$I_{s1} = V_b \cdot (G1 + G2) - V_a \cdot G1$$

$$V_b \cdot (G1 + G2) = I_{s1} + V_a \cdot G1$$

$$V_b = \frac{I_{s1}}{G1 + G2} + V_a \cdot \frac{G1}{G1 + G2}$$

$$V_b = \frac{I_{s1}}{G1 + G2} + \left(V_b \cdot \frac{G1}{G3 + G4} - \frac{I_{s2}}{G3 + G4} + V1 \cdot \frac{G4}{G3 + G4}\right) \cdot \frac{G1}{G1 + G2}$$

$$V_b = \frac{I_{s1}}{G1 + G2} - \frac{I_{s2}}{G3 + G4} \cdot \frac{G1}{G1 + G2} + V1 \cdot \frac{G4}{G3 + G4} \cdot \frac{G1}{G1 + G2}$$

$$V_b - V_b \cdot \frac{G1}{G3 + G4} \cdot \frac{G1}{G1 + G2} = \frac{I_{s1}}{G1 + G2} - \frac{I_{s2}}{G3 + G4} \cdot \frac{G1}{G1 + G2} + V1 \cdot \frac{G4}{G3 + G4} \cdot \frac{G1}{G1 + G2}$$

$$V_b \cdot \left(1 - \frac{G1}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2}\right) = \frac{I_{s1}}{G1+G2} - \frac{I_{s2}}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2} + V1 \cdot \frac{G4}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2}$$

$$V_b = \frac{\frac{I_{s1}}{G1+G2} - \frac{I_{s2}}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2} + V1 \cdot \frac{G4}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2}}{1 - \frac{G1}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2}}$$

$$V_b = \frac{\frac{I_{s1}}{G1+G2} - \frac{I_{s2}}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2} + V1 \cdot \frac{G4}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2}}{1 - \frac{G1}{G3+G4} \cdot \frac{G1}{G1+G2}}$$

$$V_b = \frac{\frac{I_{s1} \cdot (G3+G4)}{(G1+G2) \cdot (G3+G4)} - \frac{I_{s2} \cdot G1}{(G1+G2) \cdot (G3+G4)} + V1 \cdot \frac{G1 \cdot G4}{(G1+G2) \cdot (G3+G4)}}{\frac{(G1+G2) \cdot (G3+G4)}{(G1+G2) \cdot (G3+G4)} - \frac{G1^2}{(G1+G2) \cdot (G3+G4)}}$$

Wszystkie wyrażenia w równaniu na potencjał V_b są dzielone przez ten sam czynnik. Uprościmy równanie poprzez eliminację tego czynnika.

$$V_b = \frac{I_{s1} \cdot (G3+G4) - I_{s2} \cdot G1 + V1 \cdot (G1 \cdot G4)}{(G1+G2) \cdot (G3+G4) - G1^2}$$

Potencjał V_b jest już wyliczony. Wstawimy wyrażenie na potencjał V_b do równania na potencjał V_a.

$$V_a = V_b \cdot \frac{G1}{G3+G4} - \frac{I_{s2}}{G3+G4} + V1 \cdot \frac{G4}{G3+G4}$$

$$V_a = \left(\frac{I_{s1} \cdot (G3+G4) - I_{s2} \cdot G1 + V1 \cdot (G1 \cdot G4)}{(G1+G2) \cdot (G3+G4) - G1^2}\right) \cdot \frac{G1}{G3+G4} - \frac{I_{s2}}{G3+G4} + V1 \cdot \frac{G4}{G3+G4}$$

Wyrażenia na potencjały są już znane. Teraz wyznaczymy prądy gałęziach obwodu.

$$I_1 = (V_a - V_b) \cdot G1$$

$$I_2 = (V_b - V_c) \cdot G2 = V_b \cdot G2$$

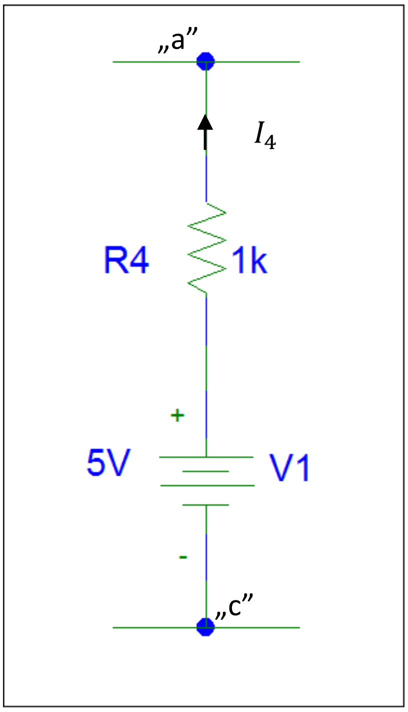
$$I_3 = (V_a - V_c) \cdot G3 = V_a \cdot G3$$

Aby obliczyć prąd I_4 musimy wrócić z transformacji na wirtualne źródło prądowe z powrotem do fizycznego źródła napięcia.

$$I_4 = \frac{V1}{R4} + (V_a - V_c) \cdot G4 = (V1 + V_a) \cdot G4$$

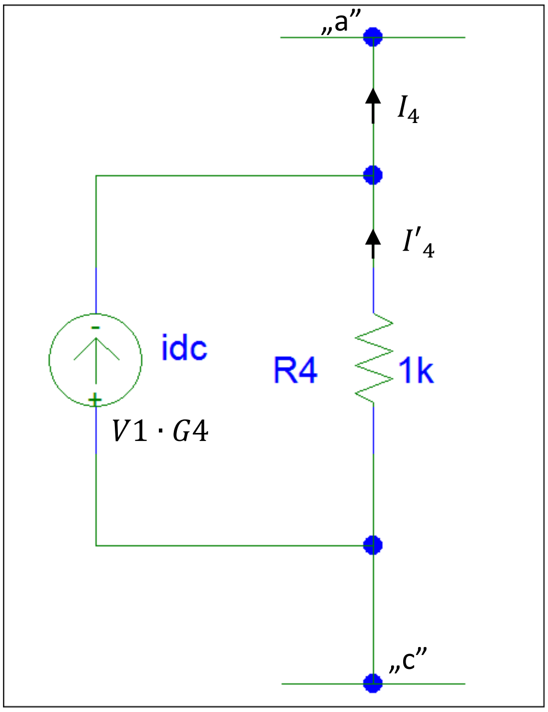
Wyrażenie na prąd I_4 jest na następnej stronie.

Ponieważ korzystamy z metody potencjałów węzłowych musieliśmy transformować wszystkie fizyczne źródła napięcia do postaci wirtualnych źródeł prądowych. W metodzie węzłowej posługujemy się zasadą ,że „nie widzi” ona fizycznych źródeł napięcia. Metoda węzłowa „widzi” tylko źródła prądu.



Rysunek 2. Gałąź z rezystorem $R4$ i źródłem napięcia $V1$ przed transformacją.

$\equiv$



Rysunek 3. Gałąź z rezystorem R4 i wirtualnym źródłem prądu po transformacji.

Jak widać na rysunkach powyżej gałąź pomiędzy węzłami "a" i "c" zmieniła się trochę po transformacji. W wszystkich obliczeniach korzystaliśmy z wirtualnego źródła prądu przedstawionego na rysunku 2. Prąd I_4 wyznaczymy korzystając z prądowego prawa Kirchhoffa.

$$V1 \cdot G4 + I'_4 - I_4 = 0$$

$$I_4 = V1 \cdot G4 + I'_4$$