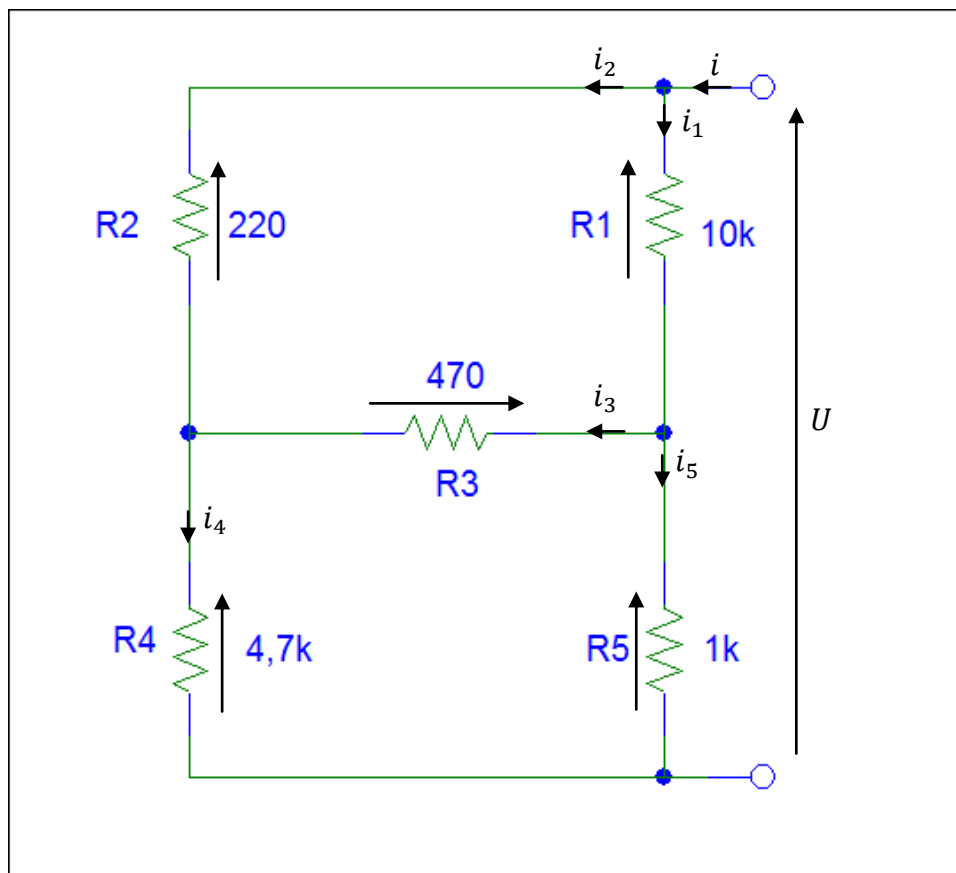


Rezystancja zastępcza obwodu prądu stałego

Celem przykładu jest wyznaczenie rezystancji R „widzianej” z zacisków A i B . Użyjemy prądowe prawa Kirchhoffa oraz napięciowego prawa Kirchhoffa do wyznaczenia rezystancji R . Rezystory są połączone w specyficzny sposób ponieważ tworzą literę H.



Picture 1. Rezystory połączone w obwód przypominający mostek H.

Jeśli przyłożymy napięcie U pomiędzy zaciski A i B obwodu elektrycznego, prąd elektryczny i popłynie przez obwód.

$$[0] \quad i = \frac{U}{R}$$

Równania prądowe Kirchhoffa dla wszystkich węzłów

$$[1] \quad i - i_1 - i_2 = 0$$

$$[2] \quad i_1 - i_3 - i_5 = 0$$

$$[3] \quad i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

$$[4] \quad i_4 + i_5 - i = 0$$

Równania napięciowe Kirchhoffa dla wszystkich węzłów

$$[5] \quad -i_3 \cdot R_3 + i_2 \cdot R_2 - i_1 \cdot R_1 = 0$$

$$[6] \quad i_4 \cdot R_4 + i_3 \cdot R_3 - i_5 \cdot R_5 = 0$$

$$[7] \quad i_5 \cdot R_5 + i_1 \cdot R_1 - U = 0$$

$$[8] \quad i_2 \cdot R_2 + i_4 \cdot R_4 - U = 0$$

Dodamy równania [7] i [8].

$$i_5 \cdot R_5 + i_1 \cdot R_1 - U + i_2 \cdot R_2 + i_4 \cdot R_4 - U = 0$$

$$i_5 \cdot R_5 + i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2 + i_4 \cdot R_4 = 2 \cdot U$$

Użyjemy równań [2] i [3] prądowe prawa Kirchhoffa. Równania te pomogą nam w eliminacji prądów i_4 i i_5 z równia.

$$i_5 = i_1 - i_3$$

$$i_4 = i_2 + i_3$$

$$(i_1 - i_3) \cdot R_5 + i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2 + (i_2 + i_3) \cdot R_4 = 2 \cdot U$$

$$i_1 \cdot R_5 - i_3 \cdot R_5 + i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2 + i_2 \cdot R_4 + i_3 \cdot R_4 = 2 \cdot U$$

$$i_1 \cdot (R_1 + R_5) + i_2 \cdot (R_2 + R_4) + i_3 \cdot (R_4 - R_5) = 2 \cdot U$$

W równaniu powyżej musimy wyeliminować prąd i_3 . Użyjemy równania [5] do tego celu.

$$-i_3 \cdot R_3 + i_2 \cdot R_2 - i_1 \cdot R_1 = 0$$

$$i_3 = \frac{i_2 \cdot R_2 - i_1 \cdot R_1}{R_3}$$

$$i_1 \cdot (R_1 + R_5) + i_2 \cdot (R_2 + R_4) + \frac{i_2 \cdot R_2 - i_1 \cdot R_1}{R_3} \cdot (R_4 - R_5) = 2 \cdot U$$

$$i_1 \cdot (R_1 + R_5) + i_2 \cdot (R_2 + R_4) + \frac{i_2 \cdot R_2 \cdot (R_4 - R_5)}{R_3} - \frac{i_1 \cdot R_1 \cdot (R_4 - R_5)}{R_3} = 2 \cdot U$$

$$i_1 \cdot \left(R_1 + R_5 - \frac{R_1 \cdot (R_4 - R_5)}{R_3} \right) + i_2 \cdot \left(R_2 + R_4 + \frac{R_2 \cdot (R_4 - R_5)}{R_3} \right) = 2 \cdot U$$

Współczynniki mnożące prądy i_1 i i_2 zawierają tylko stałe. Przypiszemy współczynnikom nowe oznaczenia aby było łatwiej zapisać równanie.

$$i_1 \cdot A_R + i_2 \cdot B_R = 2 \cdot U$$

$$A_R = R1 + R5 - \frac{R1 \cdot (R4 - R5)}{R3}$$

$$B_R = R2 + R4 + \frac{R2 \cdot (R4 - R5)}{R3}$$

W tym punkcie musimy wyeliminować prąd i_2 z równania. Użyjemy równania [1].

$$i - i_1 - i_2 = 0$$

$$i_2 = i - i_1$$

$$i_1 \cdot A_R + (i - i_1) \cdot B_R = 2 \cdot U$$

$$i_1 \cdot A_R + i \cdot B_R - i_1 \cdot B_R = 2 \cdot U$$

$$i_1 \cdot (A_R - B_R) = 2 \cdot U - i \cdot B_R$$

Ponieważ prąd i jest związany z napięciem zasilającym U przez prawo Ohma. Skorzystamy z tej relacji w celu jego zastąpienia.

$$i_1 \cdot (A_R - B_R) = 2 \cdot U - \frac{U}{R} \cdot B_R$$

$$i_1 \cdot (A_R - B_R) = U \cdot \left(2 - \frac{B_R}{R}\right)$$

[*]
$$i_1 = U \cdot \left(2 - \frac{B_R}{R}\right) \cdot (A_R - B_R)^{-1}$$

Dodamy równania [7] i [8].

$$i_5 \cdot R5 + i_1 \cdot R1 - U + i_2 \cdot R2 + i_4 \cdot R4 - U = 0$$

$$i_5 \cdot R5 + i_1 \cdot R1 + i_2 \cdot R2 + i_4 \cdot R4 = 2 \cdot U$$

Użyjemy równań [2] i [3] prądowe prawa Kirchhoffa. Równania te pomogą nam w eliminacji prądów i_1 i i_2 z równia.

$$i_1 = i_3 + i_5$$

$$i_2 = i_4 - i_3$$

$$i_5 \cdot R5 + (i_3 + i_5) \cdot R1 + (i_4 - i_3) \cdot R2 + i_4 \cdot R4 = 2 \cdot U$$

$$i_5 \cdot R5 + i_3 \cdot R1 + i_5 \cdot R1 + i_4 \cdot R2 - i_3 \cdot R2 + i_4 \cdot R4 = 2 \cdot U$$

$$i_5 \cdot (R1 + R5) + i_4 \cdot (R2 + R4) + i_3 \cdot (R1 - R2) = 2 \cdot U$$

W równaniu powyżej musimy wyeliminować prąd i_3 . Użyjemy równania [6] do tego celu.

$$i_4 \cdot R4 + i_3 \cdot R3 - i_5 \cdot R5 = 0$$

$$i_3 \cdot R3 = i_5 \cdot R5 - i_4 \cdot R4$$

$$i_3 = \frac{i_5 \cdot R5 - i_4 \cdot R4}{R3}$$

$$i_5 \cdot (R1 + R5) + i_4 \cdot (R2 + R4) + \frac{i_5 \cdot R5 - i_4 \cdot R4}{R3} \cdot (R1 - R2) = 2 \cdot U$$

$$i_5 \cdot (R1 + R5) + i_4 \cdot (R2 + R4) + \frac{i_5 \cdot R5 \cdot (R1 - R2)}{R3} - \frac{i_4 \cdot R4 \cdot (R1 - R2)}{R3} = 2 \cdot U$$

$$i_5 \cdot \left(R1 + R5 + \frac{R5 \cdot (R1 - R2)}{R3} \right) + i_4 \cdot \left(R2 + R4 - \frac{R4 \cdot (R1 - R2)}{R3} \right) = 2 \cdot U$$

Współczynniki mnożące prądy i_4 i i_5 zawierają tylko stałe. Przypiszemy współczynnikom nowe oznaczenia aby było łatwiej zapisać równanie.

$$i_5 \cdot C_R + i_4 \cdot D_R = 2 \cdot U$$

$$C_R = R1 + R5 + \frac{R5 \cdot (R1 - R2)}{R3}$$

$$D_R = R2 + R4 - \frac{R4 \cdot (R1 - R2)}{R3}$$

W tym punkcie musimy wyeliminować prąd i_4 z równania. Użyjemy równania [4].

$$i_4 + i_5 - i = 0$$

$$i_4 = i - i_5$$

$$i_5 \cdot C_R + (i - i_5) \cdot D_R = 2 \cdot U$$

$$i_5 \cdot C_R + i \cdot D_R - i_5 \cdot D_R = 2 \cdot U$$

$$i_5 \cdot (C_R - D_R) = 2 \cdot U - i \cdot D_R$$

Ponieważ prąd i jest związany z napięciem zasilającym U przez prawo Ohma. Skorzystamy z tej relacji w celu jego zastąpienia.

$$i_5 \cdot (C_R - D_R) = 2 \cdot U - \frac{U}{R} \cdot D_R$$

$$i_5 \cdot (C_R - D_R) = U \cdot \left(2 - \frac{D_R}{R} \right)$$

$$[**] \quad i_5 = U \cdot \left(2 - \frac{D_R}{R}\right) \cdot (C_R - D_R)^{-1}$$

Użyjemy teraz równań na prądy $i_1 \rightarrow [*]$ and $i_5 \rightarrow [**]$. Użyjemy równania [7] do wyprowadzenia rezystancji zastępczej R .

$$i_5 \cdot R_5 + i_1 \cdot R_1 = U$$

$$U \cdot \left(2 - \frac{D_R}{R}\right) \cdot (C_R - D_R)^{-1} \cdot R_5 + U \cdot \left(2 - \frac{B_R}{R}\right) \cdot (A_R - B_R)^{-1} \cdot R_1 = U$$

Obie strony równań podzielmy przez napięcie U .

$$\left(2 - \frac{B_R}{R}\right) \cdot (A_R - B_R)^{-1} \cdot R_1 + \left(2 - \frac{D_R}{R}\right) \cdot (C_R - D_R)^{-1} \cdot R_5 = 1$$

Z lewej strony równania stworzymy ułamek o tym samym mianowniku.

$$R_1 \cdot \left(2 - \frac{B_R}{R}\right) \cdot \frac{(C_R - D_R)}{(A_R - B_R) \cdot (C_R - D_R)} + R_5 \cdot \left(2 - \frac{D_R}{R}\right) \cdot \frac{(A_R - B_R)}{(A_R - B_R) \cdot (C_R - D_R)} = 1$$

$$R_1 \cdot \left(2 - \frac{B_R}{R}\right) \cdot (C_R - D_R) + R_5 \cdot \left(2 - \frac{D_R}{R}\right) \cdot (A_R - B_R) = (A_R - B_R) \cdot (C_R - D_R)$$

$$\left(2 \cdot R_1 - \frac{R_1 \cdot B_R}{R}\right) \cdot (C_R - D_R) + \left(2 \cdot R_5 - \frac{R_5 \cdot D_R}{R}\right) \cdot (A_R - B_R) = (A_R - B_R) \cdot (C_R - D_R)$$

$$2 \cdot R_1 \cdot (C_R - D_R) - \frac{R_1 \cdot B_R}{R} \cdot (C_R - D_R) + 2 \cdot R_5 \cdot (A_R - B_R) - \frac{R_5 \cdot D_R}{R} \cdot (A_R - B_R) = (A_R - B_R) \cdot (C_R - D_R)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{R_1 \cdot B_R}{R} \cdot (C_R - D_R) - \frac{R_5 \cdot D_R}{R} \cdot (A_R - B_R) \\ & = (A_R - B_R) \cdot (C_R - D_R) - 2 \cdot (R_1 \cdot (C_R - D_R) + R_5 \cdot (A_R - B_R)) \end{aligned}$$

$$R = \frac{-R_1 \cdot B_R \cdot (C_R - D_R) - R_5 \cdot D_R \cdot (A_R - B_R)}{(A_R - B_R) \cdot (C_R - D_R) - 2 \cdot (R_1 \cdot (C_R - D_R) + R_5 \cdot (A_R - B_R))}$$

Jak widać powyżej rezystancja zastępcza R obwodu jest całkiem dużym ułamkiem. W wzorze powyżej należy wziąć pod uwagę stałe A_R, B_R, C_R, D_R . Poprawność wyprowadzonego wzoru można sprawdzić poprzez porównanie wyników symulacji w programie Pspice z wynikami obliczeń w programie Excel.