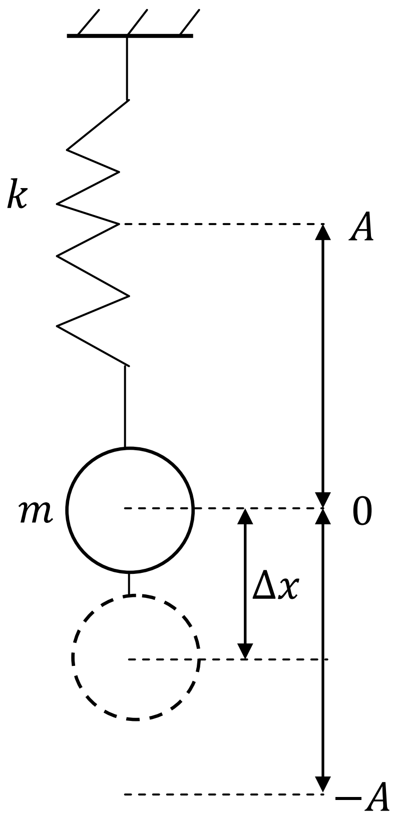
Równanie ruchu oscylatora harmonicznego



Punkt materialny o masie m[kg] jest przymocowany za pomocą sprężyny do sufitu. Sprężyna ma sztywność $k\left[\frac{N}{m}\right]$. Zakładamy że nie ma pola grawitacyjnego i ruch odbywa się w próżni. W czasie t=0 punkt materialny znajduje się w punkcie równowagi. Po chwili masa m zostaje wytrącona z położenia równowagi. Na masę m działa siła, która jest proporcjonalna do wychylenia od pozycji równowagi i sztywności sprężyny.

Równanie ruchu dla układu

$$m \cdot a = -k \cdot \Delta x$$

Siła działająca na punkt materialny na znak ujemny ponieważ kierunek jej działania jest przeciwny do kierunku wychylenia.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot \Delta x$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \Delta x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \Delta x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot \Delta x = 0; where\ \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Jak widać powyżej równanie ruchu oscylatora harmonicznego jest równaniem różniczkowym. Równanie charakterystyczne dla tego równania różniczkowego jest następujące

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania

$$r_{0\_1} = i \cdot \omega$$

$$r_{0\_2} = -i \cdot \omega$$

$$i^2 = -1;\ gdzie\ i\ jest\ jednostką\ urojoną$$

Okres drgań jest równy

$$T = 2 \cdot \Pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}; ponieważ\ \omega = 2 \cdot \Pi \cdot f = \frac{2 \cdot \Pi}{T}$$

Jak wiadomo z matematyki rozwiązanie ogólne równania różniczkowego z tego przykładu jest postaci

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$$

Teraz musimy wyznaczyć stałe C_1 i C_2. Skorzystamy w tym celu z warunków brzegowych. Pierwszy warunek to $x(t = 0) = 0$.

$$0 = C_1 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot 0} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot 0} \rightarrow C_2 = -C_1$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} - C_1 \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$$

Zmienimy formę przedstawienia z postaci wykładniczej na postać trygonometryczną.

$$x(t) = C_1 \cdot (\cos \omega \cdot t + i \cdot \sin \omega \cdot t) - C_1 \cdot (\cos \omega \cdot t - i \cdot \sin \omega \cdot t)$$

$$x(t) = C_1 \cdot \cos \omega \cdot t + i \cdot C_1 \cdot \sin \omega \cdot t - C_1 \cdot \cos \omega \cdot t + i \cdot C_1 \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$x(t) = i \cdot C_1 \cdot \sin \omega \cdot t + i \cdot C_1 \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$x(t) = 2 \cdot i \cdot C_1 \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$x(t) = A \cdot \sin \omega \cdot t$$

Gdzie

$A - amplituda$
$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f - pulsacja$

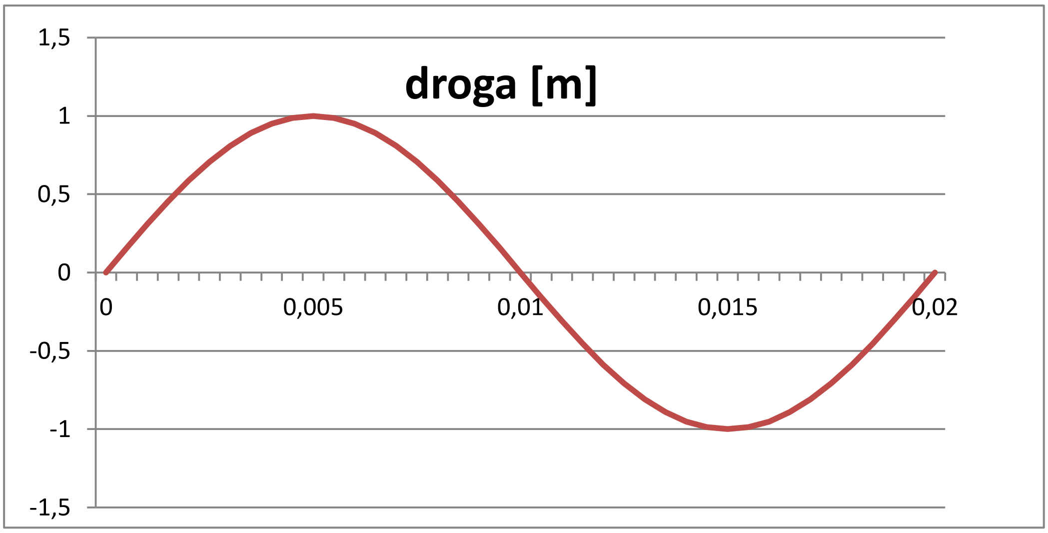
Prędkość jest pochodną drogi

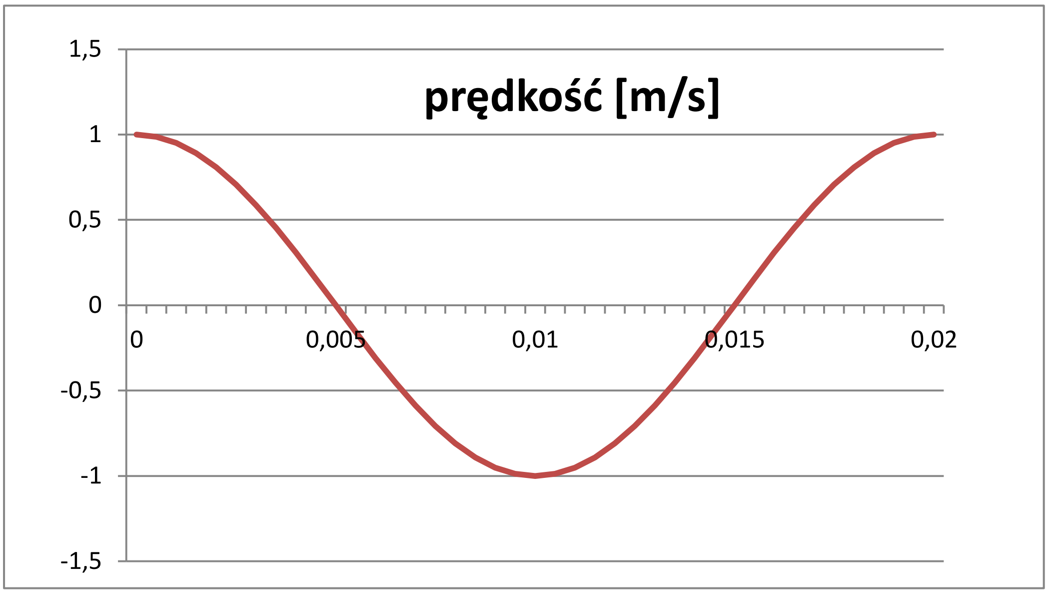
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = A \cdot\ \omega \cdot \cos \omega \cdot t$$

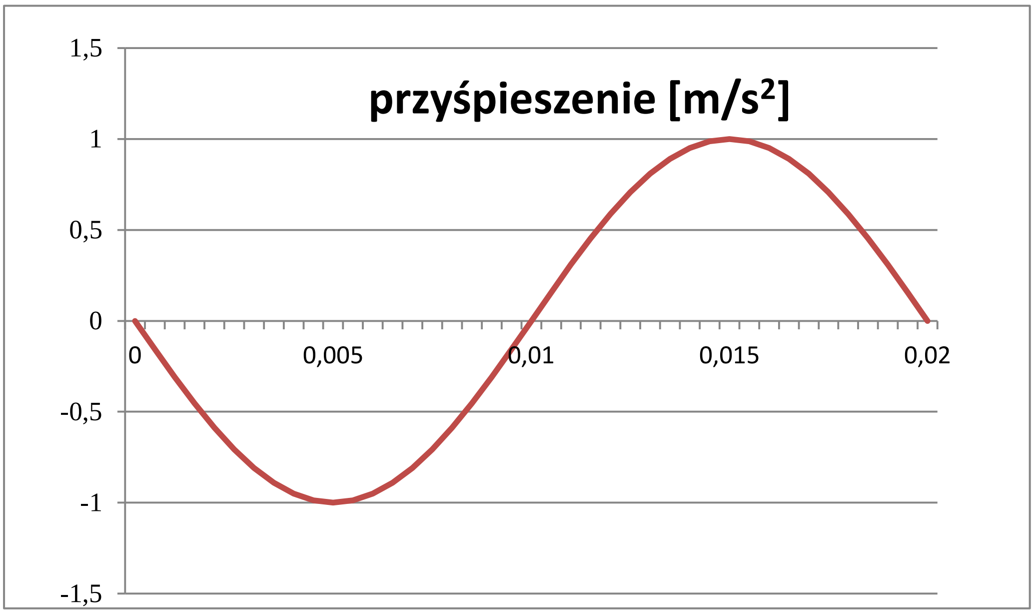
Przyśpieszenie jest pochodną prędkości

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -A \cdot\ \omega^2 \cdot \sin \omega \cdot t$$

Na następnej stronie są wykresy drogi $x(t)$, pozycji $\dot{x}(t)$, i przyśpieszenia $\ddot{x}(t)$. Wykresy zostały narysowane dla danych wejściowych :$A = 1[m];\ \omega = 100 \cdot \Pi \left[\frac{rad}{s}\right]; T = 0{,}02[s]$







Rysunek 1. Wykresy drogi, prędkości i przyśpieszenia. Wszystkie są wykreślone w funkcji czasu.