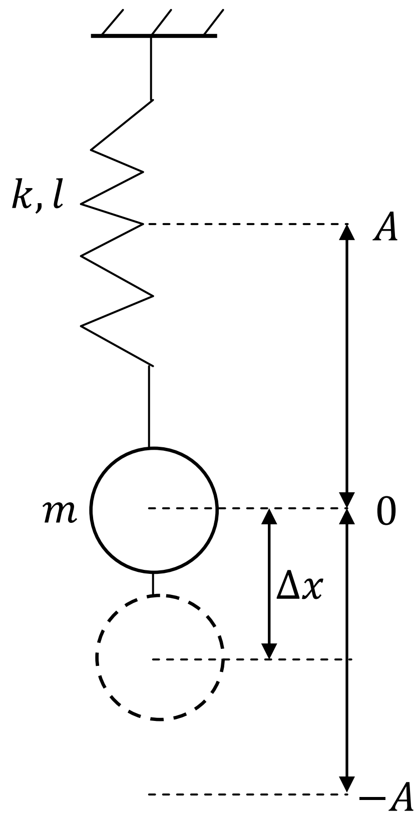
Równanie ruchu oscylatora harmonicznego



Punkt materialny o masie m[kg] jest przymocowany za pomocą sprężyny do sufitu. Sprężyna ma sztywność $k\left[\frac{N}{m}\right]$. Sprężyna ma również współczynnik tłumienia $l[\frac{N \cdot s}{m}]$. Zakładamy że nie ma pola grawitacyjnego i ruch odbywa się w próżni. W czasie t=0 punkt materialny znajduje się w punkcie równowagi. Po chwili masa m zostaje wytrącona z położenia równowagi. Na masę m działa siła, która jest proporcjonalna do wychylenia od pozycji równowagi i sztywności sprężyny.

Równanie ruchu dla układu

$$m \cdot a = -k \cdot \Delta x - l \cdot v$$

Siła działająca na punkt materialny na znak ujemny ponieważ kierunek jej działania jest przeciwny do kierunku wychylenia.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot \Delta x - l \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + l \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot \Delta x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{l}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot \Delta x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{dx}{dt} + \omega^2 \cdot \Delta x = 0$$

$$where\ \omega^2 = \frac{k}{m}\ and\ \lambda = \frac{l}{2 \cdot m}$$

Jak widać powyżej równanie ruchu oscylatora harmonicznego jest równaniem różniczkowym. Równanie charakterystyczne dla tego równania różniczkowego jest następujące

$$r^2 + 2 \cdot \lambda \cdot r + \omega^2 = 0$$

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania. Użyjemy Δ do obliczenia rozwiązań.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (2 \cdot \lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2$$

$$\Delta = 4 \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \omega^2$$

$$r_{0\_1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$r_{0\_2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$r_{0\_1} = \frac{-2 \cdot \lambda - \sqrt{4 \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \omega^2}}{2} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

$$r_{0\_2} = \frac{-2 \cdot \lambda + \sqrt{4 \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \omega^2}}{2} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Jak wiadomo z matematyki rozwiązanie ogólne równania różniczkowego z tego przykładu jest postaci

$$x(t) = C_1 \cdot e^{r_{0\_1} \cdot t} + C_2 \cdot e^{r_{0\_2} \cdot t}$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}) \cdot t} + C_2 \cdot e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}) \cdot t}$$