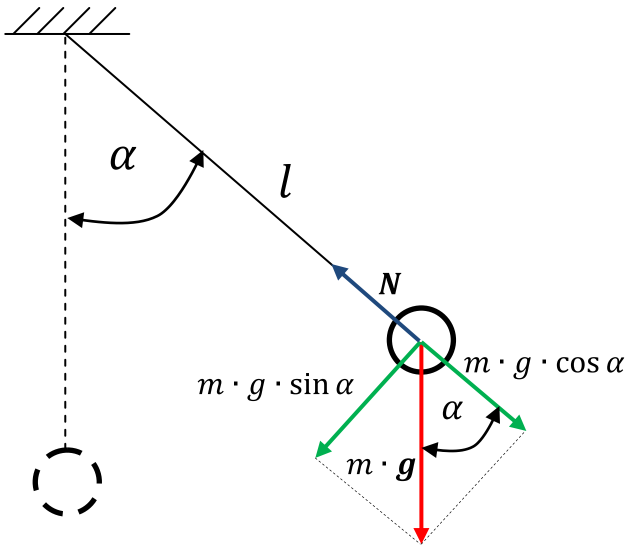
Wahadło matematyczne – równanie ruchu i okres drgań harmonicznych

Wahadło matematyczne zbudowane jest z nieważkiej nici o długości l. Jeden z końców nici przymocowany jest do sufitu. Do drugiego końca nici przymocowany jest punkt materialny o masie m. Punkt materialny jest przymocowany do sufitu poprzez nić. W stanie równowagi statycznej wahadło matematyczne znajduje się w spoczynku. W stanie równowagi siła grawitacji zrównoważona jest przez siłę naciągu nici. W pewnej chwili wahadło matematyczne zostało wychylone z pozycji równowagi o kąt α. Wahadło matematyczne znajduje się w polu grawitacyjnym Ziemi. Po wychyleniu z pozycji równowagi siła grawitacji rozkładana jest na dwie składowe.



Rysunek 1. Wahadło matematyczne.

Pierwsza składowa siły grawitacji jest równoległa do punktu materialnego. Druga składowa jest prostopadła do punktu materialnego oraz to jego trajektorii ruchu. Obie składowe siły grawitacji są zależne od kąta α. W rozważanym przykładzie zakładamy brak oporu powietrza, ruch odbywa się w idealnej próżni. Wahadło matematyczne po wytrąceniu z położenia równowagi wykonuje ruch harmoniczny po okręgu.

Równanie ruchu dla wahadła matematycznego

$$m \cdot \boldsymbol{a} = m \cdot \boldsymbol{g} \cdot \sin\alpha$$

$$I \cdot \varepsilon = -l \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$m \cdot l^2 \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -l \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + g \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin\alpha = 0$$

Dla małych wartości kąta α sinus tego kąta $\sin\alpha$ jest w przybliżeniu równy kątowi α ($\sin\alpha \approx \alpha$). Biorąc powyższe pod uwagę w równaniu ruchu można podstawić $\sin\alpha \to \alpha$.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2 \cdot \alpha = 0$$

$$\alpha(t) = C_1 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} + C_2 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}$$

$$\alpha(t) = \alpha_{max} \cdot \sin\omega \cdot t$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2}{\omega^2}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega^2}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$