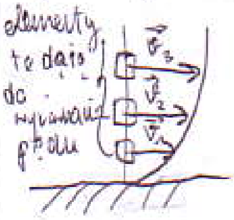
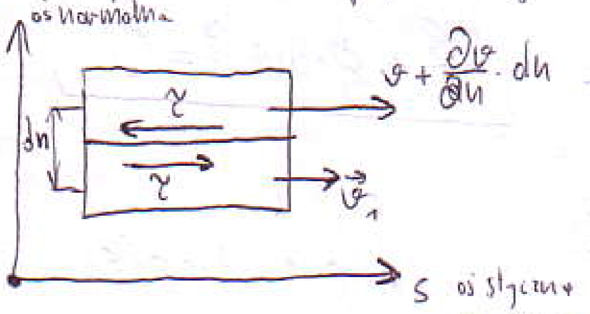
Lepkość. Prawo tarcia Newtona. W przypadku nierównomiernego rozkładu średniego pędu molekuł w płynie następuje proces wyrównania pędu, który prowadzi do powstania naprężeń stycznych czyli tarcia wewnętrznego. Wyraża się to przez lepkość płynu. Lepkość to zdolność do przenoszenia naprężeń stycznych.





$$\underbrace{\tau = \eta \cdot \frac{\partial v}{\partial n}}$$

naprężenia styczne są proporcjonalne do zmian prędkości w kierunku normalnym

$\eta = f(T, p)$ - współczynnik lepkości dynamicznej $\eta = \left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$ $1\frac{kg}{m \cdot s} = 10\,P$ P - Puaz

$\nu = \frac{\eta}{\rho}\left[\frac{m^2}{s}\right]$ - współczynnik lepkości kinematycznej $1\frac{m^2}{s} = 10^4\,St$

Pochodna substancjalna (pokazuje zmiany w polu wektorowym lub skalarnym).

$$\left\{\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

$U = f(t, x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad /:dt$$

$$\frac{DU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{DU}{dt} = \underset{\text{pochodna lokalna}}{\frac{\partial U}{\partial t}} + \underbrace{v_x\frac{\partial U}{\partial x} + v_y\frac{\partial U}{\partial y} + v_z\frac{\partial U}{\partial z}}_{\text{pochodna konwekcyjna}}$$

$$\frac{DU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad} U$$

$$\frac{DU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v}\circ\nabla U$$

Strumień wektora pola.

$$\dot{V} = \iint_A \vec{v}\circ d\vec{A}\left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$\dot{V} = \iint_A v\cdot dA\cdot\cos\alpha = \iint_A v_n\, dA$$

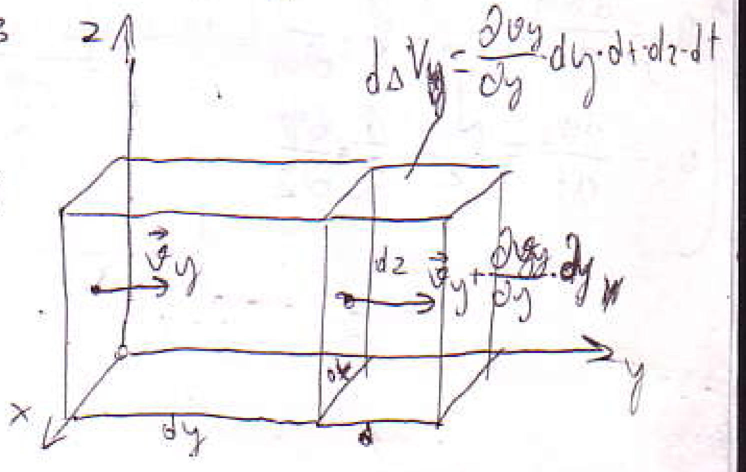
$v_n = v\cdot\cos\alpha$

Zasada zachowania masy (równanie ciągłości przepływu). $\{m = \rho\Delta V\}$

$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$

$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$

$$d\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\cdot dx\cdot dz\cdot dt$$



$$\frac{dm}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d(\rho\cdot\Delta V)}{dt} = 0 \rightarrow \Delta V\cdot\frac{d\rho}{dt} + \rho\cdot\frac{d\Delta V}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V}\cdot\frac{d\Delta V}{dt} = 0$$

pochodna substancjalna

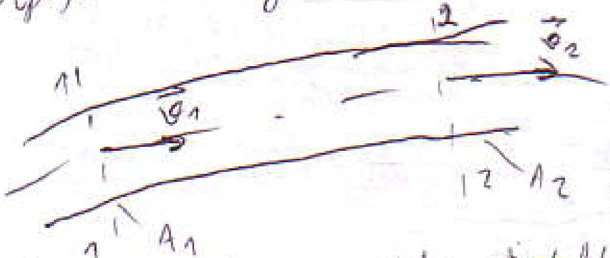
$d\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz \cdot dt$ $\quad d\Delta V = d\Delta V_x + d\Delta V_y + d\Delta V_z$ $\quad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V}\cdot\frac{d\Delta V}{dt} = 0$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{dx\cdot dy\cdot dz}\cdot\frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\cdot \cancel{dx\cdot dy\cdot dz\cdot dt}}{dt}=0$$

$\{ div\,\vec v = \nabla\circ\vec v \}$ iloczyn skalarny wektora gradientu.

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + div\,\vec v = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\cdot div\,\vec v = 0}$$

Przepływ nieściśliwy $\frac{d\rho}{dt}=0$ $\quad div\,\vec v = 0$



$$A_1\cdot\rho\cdot v_1 = A_2\cdot\rho\cdot v_2$$

$v_{śr} = \frac{1}{2} v_{max}$ – przepływ laminarny

Przepływ jednowymiarowy, ustalony $\rho \neq f(t)$

$$\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}} + v_x\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\cdot\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0$$

$\frac{\dot m}{\rho} = \dot V$

$\rho\cdot\frac{dv}{dx} = 0 \,/\cdot A\cdot /\cdot dx$

$$\boxed{\dot m = A\cdot\rho\cdot v = const} \quad \left[\frac{kg}{s}\right] \quad \dot V = A\cdot v$$

$\int A\cdot\rho\cdot dv = 0$

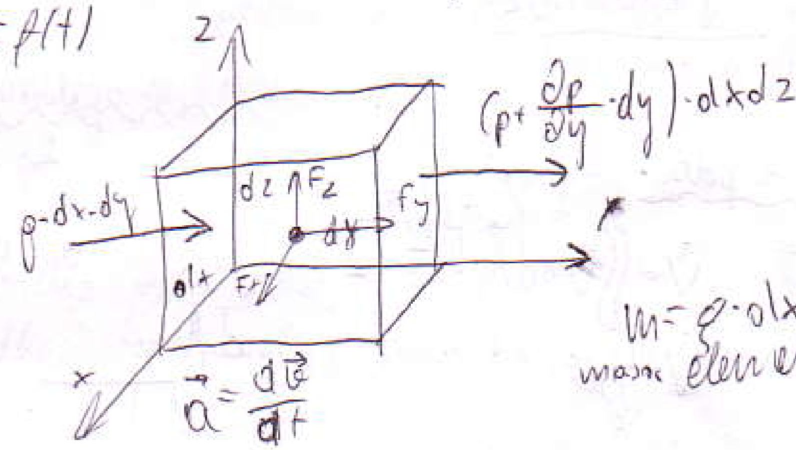
$A\cdot\rho\cdot v = const$

Równanie pędu (równanie Eulera). Ustalony przepływ płynu doskonałego.

$m\cdot d\vec v = \vec F\cdot dt \quad \rho \neq f(t)$

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{\vec F}{m}$

$\vec F_m = \frac{\vec F_{mas}}{m}$



$m = \rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz$ masa elementu płynu

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt}$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec a = \vec F_m - \frac{1}{\rho}\cdot grad\, p}$$

Płyn doskonały – brak lepkości

Reakcja hydrodynamiczna. Ustalony przepływ płynu doskonałego przez kanał przepływowy.

F - siła jaką kanał działa na płyn

R_h - reakcja hydrodynamiczna (III zasada dynamiki Newtona)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

bardzo małe

$$\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{v_y\cdot\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{v_z\cdot\frac{\partial v_z}{\partial z}} = \cancel{F_x} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v\cdot\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dx} \quad /\cdot A\cdot\rho\cdot dx$$

$$\underbrace{A\cdot\rho\cdot v}_{\dot m}\cdot dv = -A\cdot dp$$

$$\dot m\cdot dv = -A\cdot dp$$

$$\int_{v_1}^{v_2}\dot m\, dv = \int_{p_1}^{p_2} -A\cdot dp$$

siła jaka kanał działa na płyn

$$\dot m(v_2-v_1) = A_1 p_1 - A_2 p_2 + F$$

$$\vec R_h = \dot m(\vec v_1 - \vec v_2) + \vec P_1 + \vec P_2$$

$\vec P_1 = A_1 p_1$

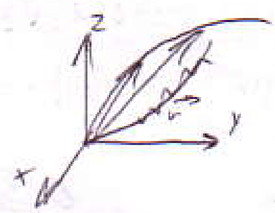
$P_2 = A_2\cdot p_2$

Jeżeli $R_h = \dot m\cdot(v_1-v_2)$ - akcyjne działanie strugi

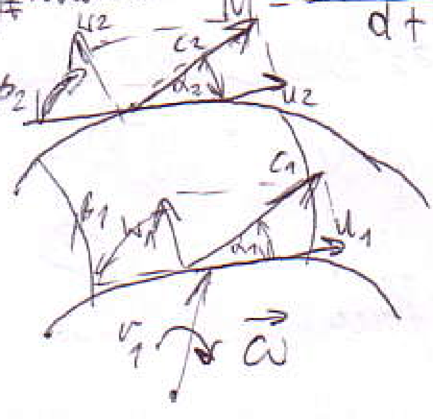
Jeżeli $v_2 = 0 \rightarrow R_h = \dot m v$ - efekt rakietowy

Zasada zachowania krętu w przepływie - zmiana krętu jest równa momentowi wszystkich sił zewnętrznych.

$m\vec v = \vec p$



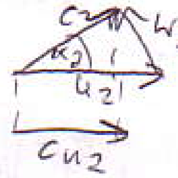
moment $\vec M = \dfrac{d(\vec r\times m\cdot\vec v)}{dt}$



$u_1 = \omega\cdot r_1$

$u_2 = \omega\cdot r_2$

$\vec c = \vec w + \vec u$



$c_{u1} = c_1\cdot\cos\alpha_1$

$c_{u2} = c_2\cdot\cos\alpha_2$

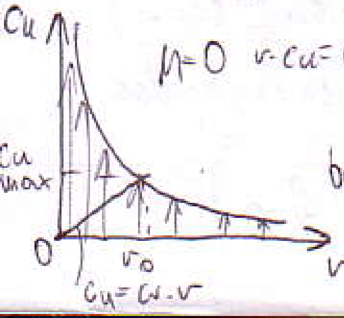
$$\boxed{M = \dot m(r_2\cdot c_{u2} - r_1\cdot c_{u1})}$$

$N = M\cdot\omega$ [W]

$N = \dot m(u_2\cdot c_{u2} - u_1\cdot c_{u1})$

$$\boxed{N = \dot V\cdot\Delta p}$$

Wir swobodny



$\omega = 0$ $r\cdot c_u = \text{constant}$

w oku cyklonu bardziej znacznie spada ciśnienie.

Zasada zachowania energii w przepływie – Równanie Bernoulliego.

$\dot{E}_1 \Rightarrow \dot{E}_2$ $\quad E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}, \; E_p = m \cdot g \cdot h, \; E_{pc} = p \cdot V$

Zakładamy przepływ jednowymiarowy oraz: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (ustalony), $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ (bezwirowy), $\rho = \rho(p)$ (płyn barotropowy), $\vec{g} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ (pole grawitacyjne)

$W = \int \frac{dp}{\rho} \quad \operatorname{grad} W = \frac{1}{\rho} \cdot \operatorname{grad} p \quad \vec{F}_m = \operatorname{grad} U$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) - (\vec{v} \times \operatorname{rot}\vec{v}) = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \cdot \operatorname{grad} p$ – równanie ruchu w postaci Lamba-Gromeki

$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{0} + \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \underbrace{(\vec{v} \times \operatorname{rot}\vec{v})}_{0} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \cdot \operatorname{grad} p$

$\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p$

$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \operatorname{grad} W - \operatorname{grad} U = 0$

$\int \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + W - U\right) = \int 0$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + W - U = \text{constant}}$$ – całka Cauchy-Lagrange'a

$W = \int \frac{1}{\rho} dp = \frac{p}{\rho} + C$

$\frac{v^2}{2} + W - U = \text{constant}$

$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{constant} \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \quad / \cdot \rho$

w przepływie doskonałym suma $(E_k, E_p, E_{pot\,c}) = \text{constant}$.

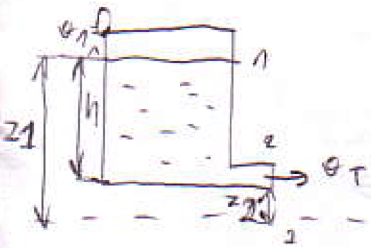
$\rho \cdot \frac{v^2}{2} + p + \rho \cdot g \cdot z = \text{constant} \quad [Pa]$

Suma ciśnień dynamicznego, statycznego i wysokościowego jest constant.

$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z = \text{constant} \quad [m]$

W przepływie doskonałym.
Suma wysokości prędkości, ciśnienia i położenia = constant.

Ustalony wypływ płynu doskonałego ze zbiornika



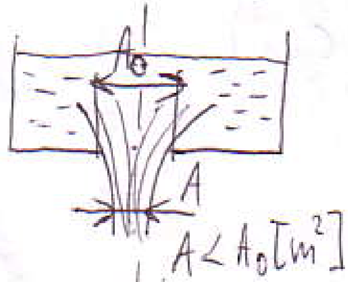
$\rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2$

Założenia $v_1 \cong 0, \; v_2 = v_T, \; p_1 = p_2 = p_a \qquad z_1 - z_2 = h$

Prędkość (teoretyczna) wypływu

$$\boxed{v_T = \sqrt{2g \cdot h}}$$ – wzór Torricelli'ego prędkości teoretycznej.

Wypływ ustalony cieczy rzeczywistej przez otwór ostrokrawędziowy.



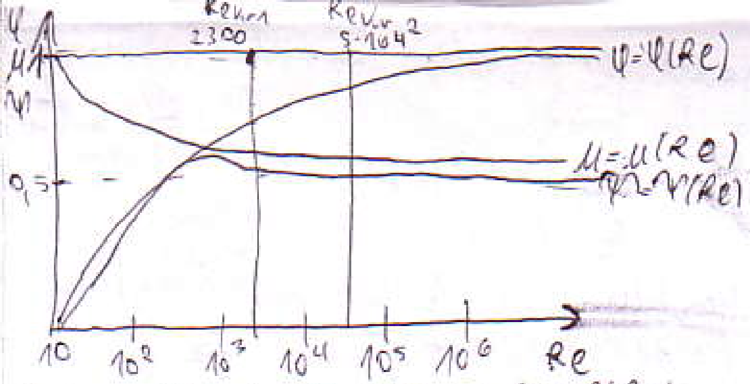
$v < v_T$

$\varphi = \frac{v}{v_T}$ – współczynnik prędkości

$\mu = \frac{A}{A_0}$ – współczynnik kontrakcji (przewężenia)

$\varphi = f(Re) \quad \mu = f(Re) \qquad Re$ – liczba Reynoldsa.

$\psi = \mu \cdot \varphi$ – współczynnik wypływu $\quad \psi = f(Re)$



Rys. $\mu=\mu(Re)$; $\varphi=\varphi(Re)$; $\psi=\psi(Re)$.

Współczynniki μ, φ, ψ pełnią rolę sprawności, nie mogą być większe od 1!

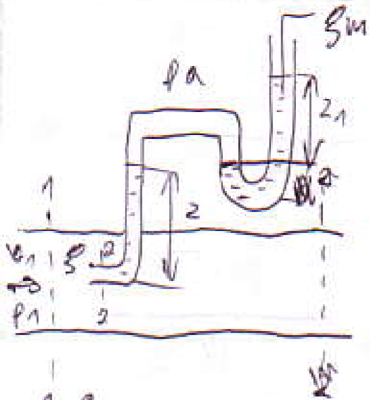
Przepływ laminarny - siły lepkości przeważają nad siłami bezwładności.

$$Q_T = A_0\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

$$Q = A\cdot v = A_0\cdot\varphi\cdot\mu\cdot\sqrt{2 g\cdot h}$$

$$Q = \psi\cdot A_0\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

Zasada działania rurek spiętrzających

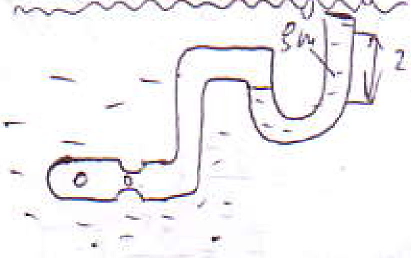


$$\rho\cdot\frac{v_1^2}{2}+p_1=p_c=\rho\cdot g\cdot z+p_a$$

$$p_c=\rho\cdot g\cdot z+p_a$$

$$\boxed{p_c=\rho_m\cdot g\cdot z_1+p_a}$$

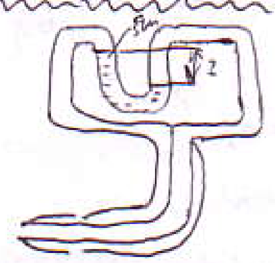
Sonda ciśnienia statycznego



$$p_s=\rho_m\cdot g\cdot z+p_a$$

$$p_d=p_c-p_s$$

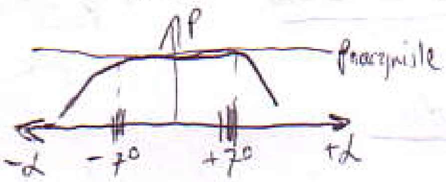
Sonda Prandtla

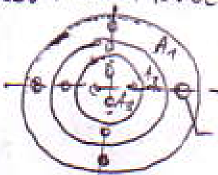


$$p_d=\rho_m\cdot g\cdot z$$

$$p_d=\rho\cdot\frac{v^2}{2} \rightarrow v=\sqrt{\frac{2\cdot p_d}{\rho}}$$

Błąd ustawienia sondy względem wektora prędkości





$A_1=A_2=A_3=\frac{1}{3}A$

punkty pomiarowe

Równanie Naviera-Stokesa. Przepływ płynu rzeczywistego.

Przepływ płynu rzeczywistego. Ściśliwy i lepki. Występują naprężenia styczne i normalne. Tarcie pomiędzy warstwami płynu powoduje zamianę energii kinetycznej w ciepło, które stanowi straty.
Stan naprężeń w płynie rzeczywistym określa tensor naprężeń Π.

$$\Pi=\begin{vmatrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz}\end{vmatrix}$$

$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}$
$\tau_{xy}=\tau_{yx}$
$\tau_{xz}=\tau_{zx}$
$\tau_{yz}=\tau_{zy}$

Równanie Naviera-Stoksea.

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\cdot\nabla^2\cdot v_x+\frac{1}{3}\cdot\nu\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot \operatorname{div}\vec{v}$$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=F_y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\cdot\nabla^2\cdot v_y+\frac{1}{3}\cdot\nu\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot \operatorname{div}\vec{v}$$

$$a_z=\frac{dv_z}{dt}=F_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\cdot\nabla^2\cdot v_z+\frac{1}{3}\cdot\nu\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot \operatorname{div}\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_m-\frac{1}{\rho}\cdot \operatorname{grad} p+\nu\cdot\nabla^2\vec{v}+\frac{1}{3}\cdot\nu\cdot \operatorname{grad}\cdot \operatorname{div}\vec{v}}$$

Warunki podobieństwa przepływu:

1. Podobieństwo geometryczne - podobieństwo ~~rasa~~ rasadniczych kształtów obiektu modelowego i rzeczywistego.
2. Podobieństwo kinematyczne - taki sam przebieg linii prądu -
3. Podobieństwo dynamiczne - podnakone ~~relacje~~ relacje między siłami.

$\left\{ \frac{D_1}{D_2} = \frac{d_1}{d_2} = \text{constant} \right.$

Parametry charakterystyczne

l_0 - liniowy wymiar charakterystyczny | v_0 - prędkość charakterystyczna | t_0 - czas charakterystyczny
ρ_0 - gęstość charakterystyczna | p_0 - ciśnienie charakterystyczne.

$\frac{x}{l_0} = \hat{x}, \ \frac{y}{l_0} = \hat{y}, \ \frac{z}{l_0} = \hat{z} \qquad x = l_0 \cdot \hat{x} \qquad v_x = v_0 \cdot \hat{x}$

Równanie Naviera-Stokesa z współczynnikami bezwymiarowymi:

$$\left(\frac{l_0}{v_0 \cdot t_0}\right) \cdot \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{t}} + \left(\hat{v}_x \cdot \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \cdot \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} + \hat{v}_z \cdot \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial \hat{z}}\right) = \left(\frac{g \cdot l_0}{v_0^2}\right)\left(\frac{F_x}{g}\right) + \left(\frac{p_0}{\rho_0 \cdot v_0^2}\right) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{\nu}{l_0 \cdot v_0}\right) \cdot \hat{\nabla}^2 \hat{v}_x +$$

$$+ \left(\frac{\nu}{l_0 \cdot v_0}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \cdot \operatorname{div} \vec{v}$$

- Liczba Strouhala - przepływy nieustalone $St = \frac{v \cdot t}{l}$ [-]
- Liczba Froudela - przepływy cieczy w polu grawitacyjnym $Fr = \frac{v^2}{g \cdot l}$ [-]
- Liczba Eulera - przepływy ściśliwe (gazy) $E = \frac{p}{\rho \cdot v^2}$
- Liczba ~~Reynoldsa~~ Reynolds'a - przepływy z uwzględnieniem lepkości (cieczy i gazy z małymi prędkościami)

$Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$ [-] $\qquad Re = \frac{\text{siły bezwładności}}{\text{siły lepkości}}$

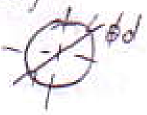
~~Przepływ laminarny~~
Przepływ laminarny
$Re < Re_{kr\,I} \qquad Re_{kr\,I} = 2300$
$Re_{kr\,II} = 5 \cdot 10^4$

w kanałach przepływowych $Re = \frac{v_{śr} \cdot d_h}{\nu}$

d_h - średnica hydrauliczna

$d_h = \frac{4A}{S}$ A - pole przekroju płynącej cieczy, S - obwód zwilżony

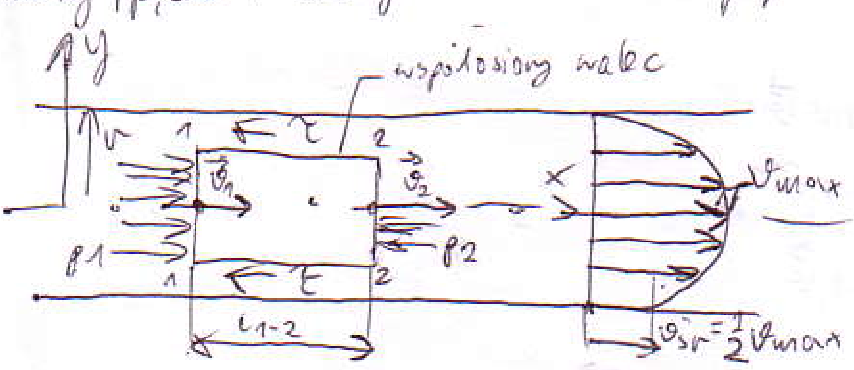
Przykład!



$d_h = \frac{4 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}{\pi d} = d$

~~Rozdz.~~ Przepływ laminarny. Równanie Hagena-Poiseuille'a.

Przepływ laminarny jest to taki przepływ rzeczywisty, w którym siły lepkości przeważają nad siłami bezwładności. Jest to przepływ ustalony. Linie prądu są równoległe do siebie i do osi rurociągu. Wymiana masy, pędu i energii w kierunku poprzecznym do niego jest znikoma.



$\sum F_{ix} = 0$

$p_1 \cdot \pi y^2 - p_2 \cdot \pi y^2 - \tau \cdot l_{1-2} \cdot 2\pi y = 0$

$y(p_1 - p_2) - \tau \cdot l_{1-2} \cdot 2 = 0$

Układamy równanie Bernoulliego

$$\cancel{\rho\cdot\frac{v_1^2}{2}}+p_1+\cancel{\rho\cdot g\cdot z_1}=\cancel{\rho\cdot\frac{v_2^2}{2}}+p_2+\cancel{\rho\cdot g\cdot z_2}+p_{STRAT\,1-2}$$

odpada bo laminarny; przepływ poziomy

$$\tau=\eta\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\qquad \tau=-\eta\cdot\frac{dv}{dy}$$

{ minus bo przy ściankach $v=0$ }

$$p_1-p_2=p_{STRAT\,1-2}$$

$$y(p_1-p_2)-\tau\cdot l_{1-2}\cdot 2=0$$

$$y\cdot p_{STRAT\,1-2}+\eta\cdot\frac{dv}{dy}\cdot l_{1-2}\cdot 2=0$$

$$dv=-\frac{p_{STRAT\,1-2}}{2\cdot\eta\cdot l_{1-2}}\cdot y\cdot dy$$

$$dv=-\frac{p_{STRAT\,1-2}}{2\cdot\eta\cdot l_{1-2}}\cdot\frac{\rho\cdot g}{\rho\cdot g}\cdot y\cdot dy$$

spadek hydrauliczny

$$J=\frac{H_{STRAT\,1-2}}{l_{1-2}}$$

$$p=\rho\cdot g\cdot h\qquad h=\frac{p}{\rho\cdot g}$$

$$\nu=\frac{\eta}{\rho}$$

$$dv=-\frac{J\cdot g}{2\cdot\nu}\cdot y\cdot dy$$

$$\int dv=\int-\frac{J\cdot g}{2\cdot\nu}\cdot y\cdot dy$$

$$v=-\frac{J\cdot g}{2\nu}\cdot\frac{y^2}{2}+C$$

{ prędkość zależy od kwadratu promienia }

$$\pi r^2=\pi\cdot\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2=\frac{\pi\cdot d^2}{4}\qquad r=\tfrac{1}{2}\cdot d$$

wyznaczamy C

$$v=-\frac{J\cdot g}{2\nu}\cdot\frac{y^2}{2}+C$$

wyznaczamy C, dla $y=r\rightarrow v=0$

$$0=-\frac{J\cdot g}{2\cdot\nu}\cdot\frac{r^2}{2}+C$$

$$C=\frac{J\cdot g}{2\cdot\nu}\cdot\frac{r^2}{2}$$

$$\boxed{v=\frac{J\cdot g}{4\cdot\nu}\cdot(r^2-y^2)}$$

$$v_{max}=\frac{J\cdot g}{4\cdot\nu}\cdot r^2$$

$$v_{śr}=\frac{J\cdot g\cdot d^2}{32\cdot\nu}$$

$$\dot m=A\cdot\rho\cdot v$$

$$\boxed{\dot m=\frac{\pi\cdot J\cdot g\cdot d^4\cdot\rho}{128\cdot\nu}}$$