

$$y'' + 8y' + 16y = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

17.04.2016

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = (s^2 - s) \cdot Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{8y'\} = 16 \cdot Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{8y'\} = 8 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) = 8 \cdot (s \cdot Y(s) - 1)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-2)\} = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} \quad \mathcal{L}\{f(t-4)\} = \frac{1}{s} \cdot e^{-4s}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - s + 8 \cdot (s \cdot Y(s) - 1) + 16 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - s + 8 \cdot s \cdot Y(s) - 8 + 16 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s}$$

$$s^2 \cdot Y(s) + 8 \cdot s \cdot Y(s) + 16 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 8s + 16) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8$$

$$(s+4)(s+4)$$

$$Y(s) = \left[\frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8 \right] \cdot \frac{1}{s^2 + 8s + 16}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$Y(s) = \left[\frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8 \right] \cdot \frac{1}{(s+4)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s+4)^2} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{s+8}{(s+4)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot e^{-2s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{s+4+4}{(s+4)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{\cancel{s+4}}{(s+4)\cancel{s+4}} + \frac{4}{(s+4)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{1}{s+4} + \frac{4}{(s+4)(s+4)}$$

$$\frac{1}{s(s+4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{(s+4)^2}$$

$$1 = A \cdot (s+4)^2 + B \cdot (s(s+4)) + C \cdot s$$

$$1 = \underline{A \cdot s^2} + \underline{8 \cdot A \cdot s} + \underline{16 \cdot A} + \underline{B \cdot s^2} + \underline{4 \cdot B \cdot s} + \underline{C \cdot s}$$

$$s^2: A+B=0 \rightarrow B=-A=-\frac{1}{16}$$

$$s^1: 8A+4B+C=0$$

$$s^0: 16A=1 \rightarrow A=\frac{1}{16}$$

$$C = -8A - 4B = -\frac{8}{16} - (-\frac{4}{16}) = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{16} \quad B = -\frac{1}{16} \quad C = -\frac{1}{4}$$

$$Y(s) = \left[+\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{s+4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \right] \cdot e^{-2 \cdot s} +$$

$$- \left[+\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{s+4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \right] \cdot e^{-4 \cdot s} + \frac{1}{s+4} + \frac{4}{(s+4)^2} \Big|_{s=s+4}$$

$$\Delta(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$y(t) = \frac{1}{16} \cdot 1(t-2) - \frac{1}{16} \cdot e^{-4 \cdot (t-2)} - \frac{1}{4} \cdot e^{-4(t-2)} +$$

$$- \frac{1}{16} \cdot 1(t-4) + \frac{1}{16} \cdot e^{-4(t-4)} - \frac{1}{4} \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot (t-4) + e^{-4 \cdot t} + 4 \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot t$$

<http://www.mbmater.pl>

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha \cdot t} \cdot f(t)] = F(s + \alpha)$$

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)] = F(s) \cdot e^{-\alpha \cdot s}$$

$$y(t) = e^{-4 \cdot t} + 4 \cdot t \cdot e^{-4 \cdot t} + \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cdot e^{-4 \cdot t} - t \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{-4 \cdot t} \right] \cdot y(t-2) +$$

$$- \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cdot e^{-4 \cdot t} + t \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{-4 \cdot t} \right] y(t-4) \quad \underline{0.4}$$