Dane:

$x = x(t) = b \cdot \cos \omega t$

$y = y(t) = b \cdot \sin \omega t$

$b, \omega = const$

Znaleźć

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$

tor ruchu ?

Treść

Punkt A porusza się w płaszczyźnie XY zgodnie z równaniami ruchu $x(t)$ i $y(t)$. Znaleźć prędkość, przyspieszenie i tor tego punktu.

$$\begin{cases} x = b \cdot \cos \omega t \\ y = b \cdot \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = b^2 \cdot \cos^2 \omega t \\ y^2 = b^2 \cdot \sin^2 \omega t \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = b^2 \cdot \cos^2 \omega t + b^2 \cdot \sin^2 \omega t$

$x^2 + y^2 = b^2 \cdot (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$

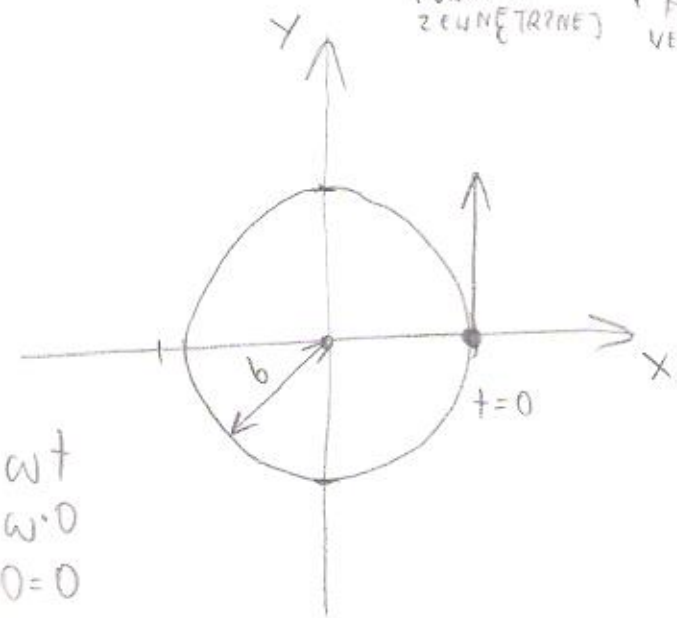
$x^2 + y^2 = b^2$

$b = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$(g \circ f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

(POCHODNA FUNKCJI ZEWNĘTRZNEJ; POCHODNA FUNKCJI WEWNĘTRZNEJ)




Punkt początkowy dla $t = 0$

$x(t) = b \cdot \cos \omega t$

$x(0) = b \cdot \cos \omega \cdot 0$

$x(0) = b \cdot \cos 0 = 1 \cdot b = b$

$x(0) = b$

$y(t) = b \cdot \sin \omega t$

$y(0) = b \cdot \sin \omega \cdot 0$

$y(0) = b \cdot \sin 0 = 0$

$y(0) = 0$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) = -b \cdot \omega \cdot \sin \omega t \\ \dot{y}(t) = b \cdot \omega \cdot \cos \omega t \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = \sqrt{b^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2 \omega t + b^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t} =$$

$$= \sqrt{b^2 \cdot \omega^2 \cdot (\underbrace{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}_{=1})} = \sqrt{b^2 \cdot \omega^2} = b \cdot \omega$$

$v = |\vec{v}| = b \cdot \omega$

$v = |\vec{v}| = b \cdot \omega$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) = -b\omega^2 \cdot \cos\omega t \\ \ddot{y}(t) = -b \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t \end{bmatrix}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2} = \sqrt{b^2 \cdot \omega^4 \cdot \cos^2\omega t + b^2 \cdot \omega^4 \cdot \sin^2\omega t}$$

$$= \sqrt{b^2 \cdot \omega^4 \cdot \underbrace{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)}_{=1}} = b \cdot \omega^2$$

$$\underline{a = |\vec{a}| = b \cdot \omega^2}$$