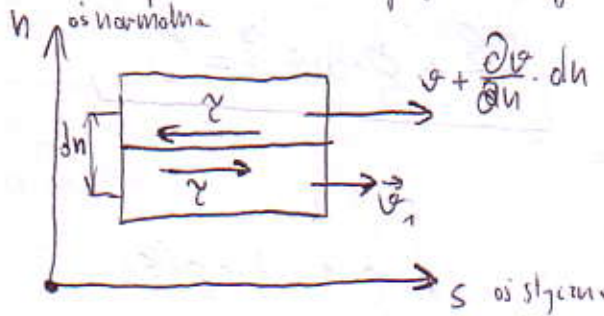


lepkość - prawo tarcia Newtona. W tym przypadku nie równomiernego rozkładu średniego pędu molekuł w płynie następuje proces wyrównania pędu, który prowadzi do powstania naprężenia stycznych czyli tarcia wewnętrznych. Wyniesie to przez lepkość płynu. Lepkość to zdolność do przenoszenia naprężenia stycznych.



$$\tau = \eta \cdot \frac{\partial v}{\partial h}$$

naprężenie styczne są proporcjonalne do zmian prędkości w kierunku normalnym

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = 10 \text{ P} \quad \text{P - Poaz}$$

$\eta = f(T, \rho)$  - współczynnik lepkości dynamicznej  $\eta = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right]$

$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$  - współczynnik lepkości kinematycznej  $1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 10^4 \text{ st}$

Podrodna substancjalna (pokazuje zmiany w polu wektorowym lub skalarowym)  $\left\{ \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right\}$

$U = f(t, x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz \quad | : dt$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} U$$

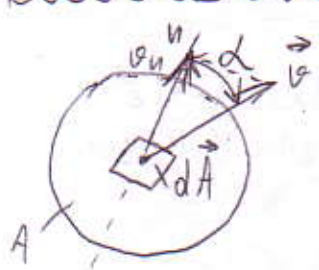
$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla U$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \underbrace{v_x \frac{\partial U}{\partial x} + v_y \frac{\partial U}{\partial y} + v_z \frac{\partial U}{\partial z}}_{\text{pochodna konwekcyjna}}$$

↑  
pochodna lokalna

Strumień wektora pola



$$\dot{V} = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$\dot{V} = \iint_A v \cdot dA \cdot \cos \alpha = \iint_A v_n \cdot dA$$

$$v_n = v \cdot \cos \alpha$$

Zasada zachowania masy (zrównanie ciągłości przepływu)

$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$

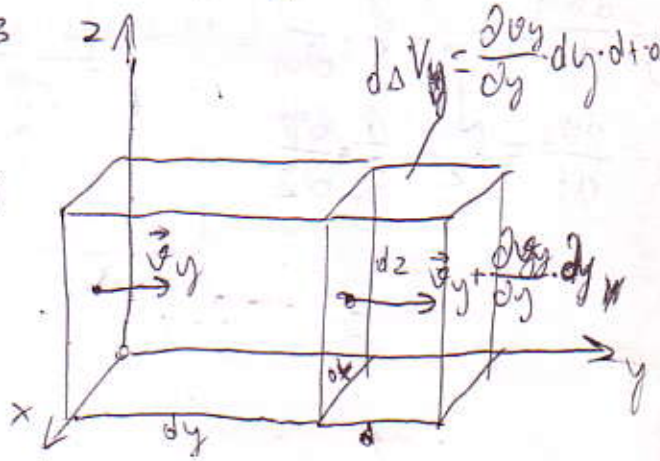
$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$

$$\dot{m} = \rho \cdot \Delta V$$

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(\rho \cdot \Delta V)}{dt} = 0 \Rightarrow \Delta V \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \frac{d\Delta V}{dt} = 0$$

$$d\Delta V = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dt \cdot dz \cdot dt$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{d\Delta V}{dt} = 0$$



↑  
pochodna substancjalna



$$d\Delta V = \frac{\partial \Delta V}{\partial x} dx + \frac{\partial \Delta V}{\partial y} dy + \frac{\partial \Delta V}{\partial z} dz - dt$$

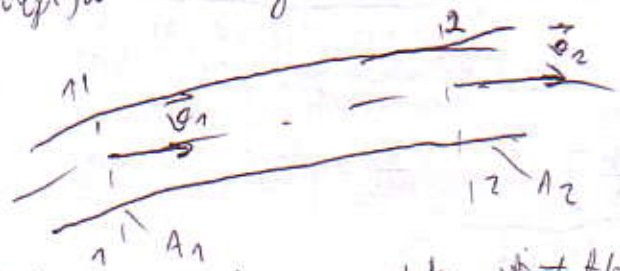
$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{dx dy dz} \left( \frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho_z}{\partial z} \right) dx dy dz - dt = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} \\ \text{ilorzyni} \\ \text{składowy wektora} \\ \text{gradientu.} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Prędkość niesięg  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$   $\operatorname{div} \vec{v} = 0$



$$A_1 \rho \cdot v_1 = A_2 \rho \cdot v_2$$



$v_{\text{śr}} = \frac{1}{2} v_{\text{max}}$   
prędkość laminarna

Prędkość jednokierunkowa, ustalony  $\rho \neq f(t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad / \cdot A \cdot l \cdot dx$$

$$\boxed{\dot{m} = A \cdot \rho \cdot v = \text{const}}$$

$$\left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \quad \begin{aligned} \dot{m} &= \dot{V} \\ \dot{V} &= A \cdot v \end{aligned}$$

$$\int A \cdot \rho \cdot dv = \int$$

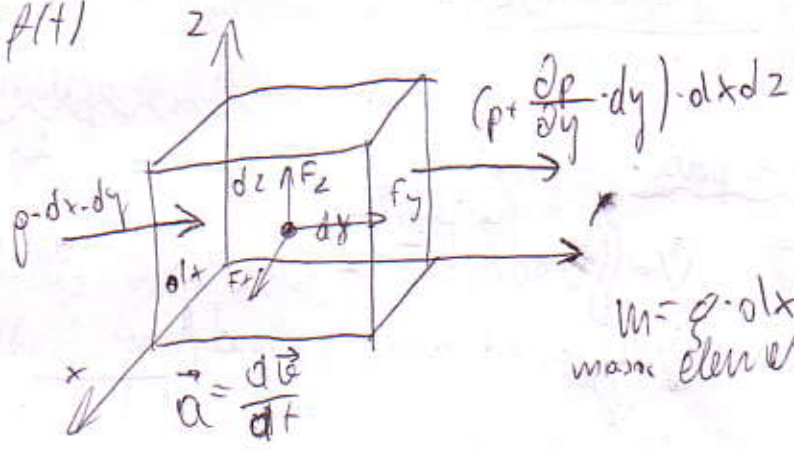
$$A \cdot \rho \cdot v = \text{const}$$

Równanie ruchu (równanie Eulera). Ustalony prędkość płynu doskonałego.

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt \quad \rho \neq f(t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{F}_{\text{mas}}}{m}$$



$m = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$   
masa elementu płynu

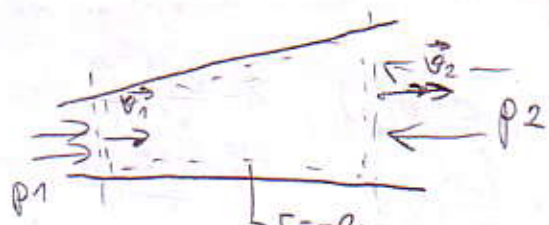
$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p}$$

Płyn doskonały - brak lepkości



Reakcja hydrodynamiczna. Ustalony przepływ płynu doskonałego przez kanał przepływowy.



$F = -R_h$   
 $F$  - siła jaka kanał działa na płyn

$R_h$  - reakcja hydrodynamiczna (III zasada dynamiki NEWTONA)

$$a_x = \frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{bardzo małe}$$

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} + \vartheta_x \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \vartheta_z \frac{\partial \vartheta_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot A \cdot \rho \cdot dx$$

$$A \cdot \rho \cdot \vartheta \cdot d\vartheta = -A \cdot dp$$

$$\dot{m} \cdot d\vartheta = -A \cdot dp$$

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \dot{m} \cdot d\vartheta = \int_{p_1}^{p_2} -A \cdot dp$$

siła jaka kanał działa na płyn

$$\dot{m}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = A_1 p_1 - A_2 p_2 + F$$

$$\vec{R}_h = \dot{m}(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2) + \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$P_1 = A_1 p_1$$

$$P_2 = A_2 p_2$$

Jeżeli  $R_h = \dot{m}(\vartheta_1 - \vartheta_2)$  - skrajne odstawienie strugi

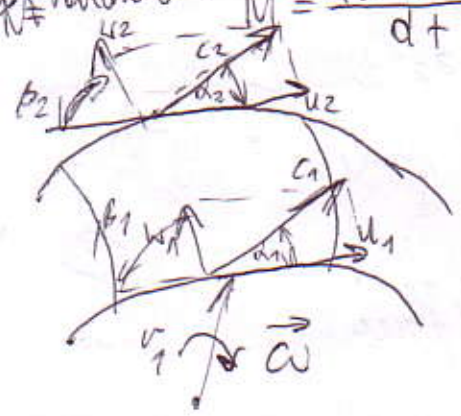
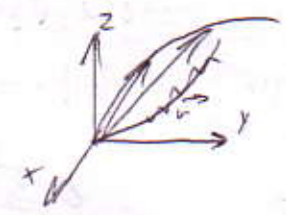
Jeżeli  $R_h = \vartheta_2 = 0 \rightarrow R_h = \dot{m} \vartheta$  - efekt rakietowy

Zasada zachowania momentu w przepływie - zmiana kąta jest równa momentom

występujących się równoległych.

$$\vec{M} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{\vartheta})}{dt}$$

$$m \vec{\vartheta} = \vec{p}$$



$$u_1 = \omega \cdot r_1$$

$$u_2 = \omega \cdot r_2$$

$$\vec{c} = \vec{\omega} + \vec{u}$$



$$c_{u1} = c_1 \cdot \cos \alpha_1$$



$$c_{u2} = c_2 \cdot \cos \alpha_2$$

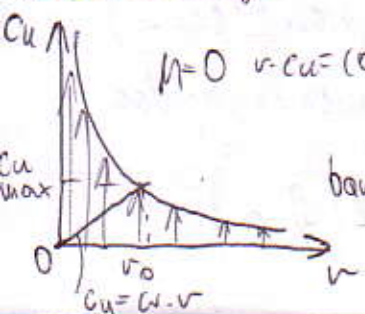
$$M = \dot{m} (r_2 \cdot c_{u2} - r_1 \cdot c_{u1})$$

$$N = M \cdot \omega \quad [W]$$

$$N = \dot{m} (u_2 \cdot c_{u2} - u_1 \cdot c_{u1})$$

$$N = \dot{V} \cdot \Delta p$$

linia swobodna



$\omega = 0 \rightarrow r \cdot \omega = \text{constant}$

w osi cyklotonu  
 bardziej znacznie spada  
 ciśnienie



Zasada zachowania energii w przepływie - Równanie Bernoulliego

$\vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_2$       $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$ ,  $E_p = m \cdot g \cdot h$ ,  $E_{pc} = p \cdot V$

Zakładamy przepływ jednowymiarowy oraz:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  (ustalony),  $\text{rot} \vec{v} = 0$  (bezwrotny),  $\vec{g} = \vec{g}(p)$  (płyn barotropowy),  $\vec{g} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$  (pole grawitacyjne)

$W = \int \frac{dp}{\rho}$       $\text{grad } W = \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p$       $\vec{F}_m = \text{grad } U$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}(\frac{v^2}{2}) - (\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}) = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p$      (równanie ruchu w postaci Lamba-Gromel'ego)

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}(\frac{v^2}{2}) - (\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}) = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p$

$W = \int \frac{1}{\rho} dp = \frac{p}{\rho} + C$

$\frac{v^2}{2} + W - U = \text{constant}$

$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{constant}$  [ $\frac{J}{kg}$ ] ( $\cdot \rho$ )

w przepływie doskonałym suma ( $E_k, E_p, E_{pc}$ ) = constant.

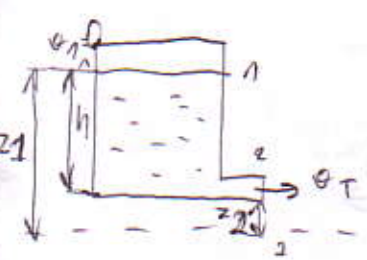
$\rho \cdot \frac{v^2}{2} + p + \rho \cdot g \cdot z = \text{constant}$  [Pa]

suma energii dynamicznego, statycznego i hydrostatycznego jest constant.

$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z = \text{constant}$  [m]

w przepływie doskonałym. Suma wysokości proekcji, ciśnienia i parcia = constant.

Ustalony wypływ płynu doskonałego ze zbiornika



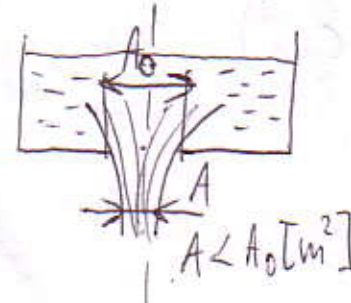
$\rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2$

zakładamy  $v_1 \approx 0$ ,  $v_2 = v_T$ ,  $p_1 = p_2 = p_a$       $z_1 - z_2 = h$

prędkości (teoretyczna) wypływu

$v_T = \sqrt{2g \cdot h}$  - wzór Torricello'go - prędkości teoretyczna.

Wypływ ustalony cieczy rzeczywistej przez otwór ostrokrawędziowy.



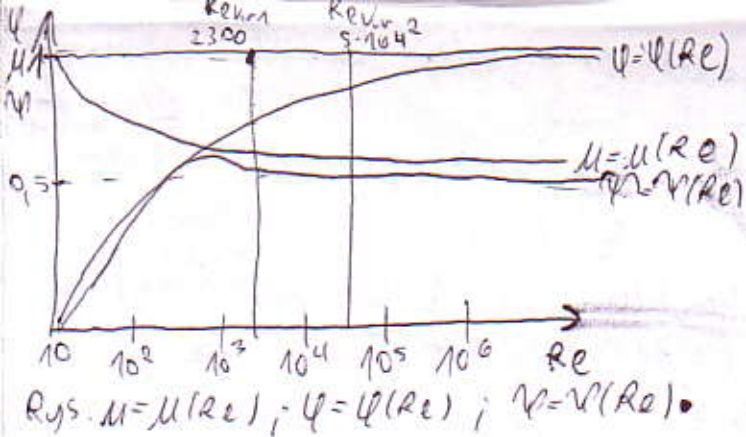
$\psi = \frac{v}{v_T}$  - współczynnik prędkości

$\mu = \frac{A}{A_0}$  - współczynnik kontraktacji (prężnienia)

$Q = f(Re)$       $\mu = f(Re)$       $Re$  - liczba Reynoldsa.

$\Psi = \mu \cdot \psi$  - współczynnik wypływu      $M = f(Re)$





Współczynniki  $M$ ,  $\psi$ ,  $\nu$  zależą od sprawności, nie mogą być większe od 1.

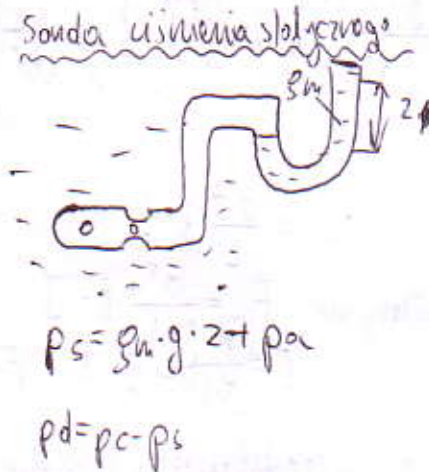
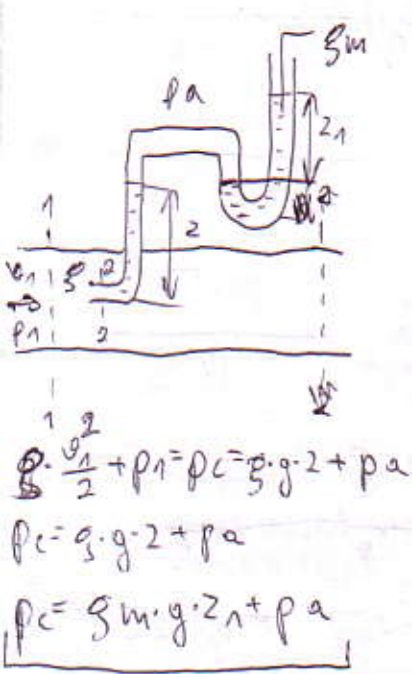
Prędkość laminarna - siły lepkości przeważają nad siłami bezwładności.

$$Q_T = A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

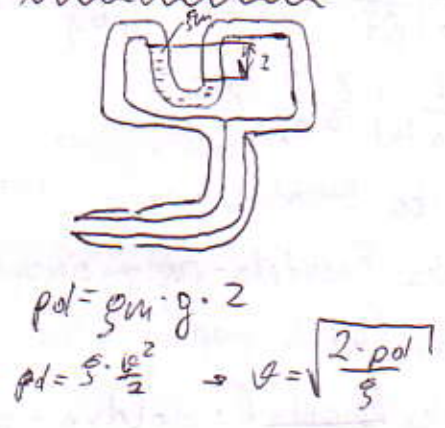
$$Q = A \cdot v = A_0 \cdot \psi \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$Q = \nu \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

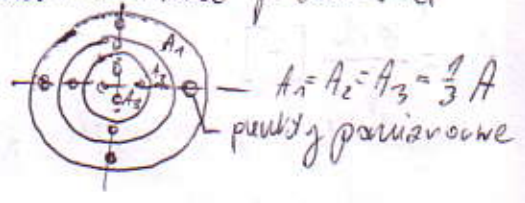
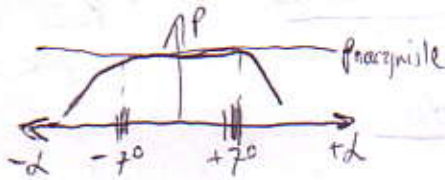
Zasada działania rurki spiżniowej



Sonda Prandtla



Błąd ustawienia sondy względem wektora prędkości



Równanie Naviera-Stokesa - przepływ płynu rzeczywistego

Przepływ płynu rzeczywistego. Ścisły i lepki. Występują naprężenia styczne i normalne. Turbulencje powstają w wyniku porażenia energii kinetycznej w ciepło i utracie stałości strukturalnej. Stan naprężenia w płynie rzeczywistym określa tensor naprężenia  $\Pi$ .

$$\Pi = \begin{vmatrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix} \begin{cases} p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases}$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \nabla^2 v_x + \frac{1}{3} \nu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{v}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \nabla^2 v_y + \frac{1}{3} \nu \cdot \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \vec{v}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \nabla^2 v_z + \frac{1}{3} \nu \cdot \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nu \cdot \text{grad } \text{div } \vec{v}$$



Warunki podobieństwa przepływu:

1. Podobieństwo geometryczne - podobieństwo osi i zasadniczym kształtów obiektu modelowanego i rzeczywistego.
2. Podobieństwo kinematyczne - taki sam przebieg linii prądu.
3. Podobieństwo dynamiczne - podane relacje między siłami.

$$\left\{ \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{d_1}{d_2} = \text{constant} \right.$$

Parametry charakterystyczne

$\rho_0$  - gęstość charakterystyczna |  $v_0$  - prędkość charakterystyczna |  $l_0$  - czas charakterystyczny  
 $\xi_0$  - geometria charakterystyczna |  $p_0$  - ciśnienie charakterystyczne.

$$\frac{x}{l_0} = \hat{x}, \frac{y}{l_0} = \hat{y}, \frac{z}{l_0} = \hat{z} \quad x = l_0 \cdot \hat{x} \quad v_x = v_0 \cdot \hat{x}$$

Równanie Naviera-Stokesa z współczynnikami bezwymiarowymi:

$$\left( \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_0} \right) \cdot \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{t}} + \left( \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial \hat{z}} \right) = \left( \frac{g \cdot l_0}{v_0^2} \right) \left( \frac{F_x}{g} \right) + \left( \frac{p_0}{\rho_0 \cdot v_0^2} \right) + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \left( \frac{\nu}{l_0 v_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial \hat{x}^2} + \left( \frac{\nu}{l_0 v_0} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \cdot \text{div } \hat{v}$$

• Liczba Strouhala - przepływ nieustalony

$$St = \frac{v \cdot t}{l} [-]$$

• Liczba Froude'a - przepływ ciekłym pod grawitacją

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l} [-]$$

• Liczba Eulera - przepływ ściśniętym (gazy)

$$E = \frac{p}{\rho \cdot v^2}$$

• Liczba Reynoldsa Reynolds'a - przepływ z uwzględnieniem lepkości (ciekły i gazy z małymi prędkościami)

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} [-]$$

$$Re = \frac{\text{siły bezwładności}}{\text{siły lepkości}}$$

Przepływ laminarny  
 $Re < Re_{crit}$      $Re_{crit} = 2300$   
 $Re_{crit} = 5 \cdot 10^4$

w kanałach przepływowych

$$Re = \frac{v \cdot r \cdot dh}{\nu}$$

$dh$  - średnica hydrauliczna

$$dh = \frac{4A}{S}$$

A - pole przekroju płynącej cieczy  
 S - obwód umiarkony

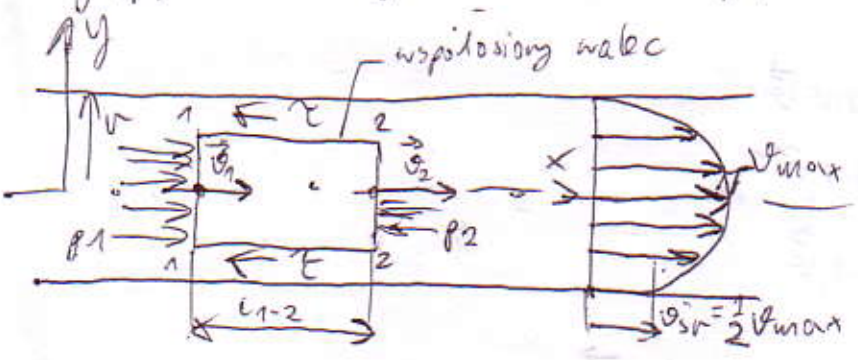
Przekład



$$dh = \frac{4 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}{\pi d} = d$$

Przepływ laminarny. Równanie Hagen-Poiseuille'a.

Przepływ laminarny jest to taki przepływ rzeczywisty, w którym siły lepkości przeważają nad siłami bezwładności. Jest to przepływ ustalony. Linie prądu są równoległe do siebie i do osi umiarkowej. Wymiar masy i pędu i energii w kierunku poprzecznym do kierunku przepływu jest znikoma.



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$p_1 \cdot \pi y^2 - p_2 \cdot \pi y^2 - \tau \cdot l_{1-2} \cdot 2 \pi y = 0$$

$$y(p_1 - p_2) - \tau \cdot l_{1-2} \cdot 2 = 0$$



Wzrostowy wariant Bernoulliego

$$\rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_{STRAT 1-2}$$

odpada bo  
wzrostowy

przejmu  
potencjał

$$\gamma = \rho \cdot \frac{dv}{dn}$$

$$\gamma = -\eta \cdot \frac{dv}{dy}$$

Wzrostowy bo  
Prz. siłki  $v=0$

$$p_1 - p_2 = p_{STRAT 1-2}$$

$$\gamma(p_1 - p_2) = \gamma \cdot l_{1-2} \cdot 2 = 0$$

$$\gamma \cdot p_{STRAT 1-2} + \rho \cdot \frac{dv}{dy} \cdot l_{1-2} \cdot 2 = 0$$

$$dv = -\frac{p_{STRAT 1-2}}{2 \cdot \eta \cdot l_{1-2}} \cdot y \cdot dy$$

$$dv = -\frac{p_{STRAT 1-2}}{2 \cdot \eta \cdot l_{1-2}} \cdot \frac{\rho \cdot g}{\rho \cdot g} \cdot y \cdot dy$$

$$dv = -\frac{J \cdot g}{2 \cdot V} \cdot y \cdot dy$$

$$\int dv = \int -\frac{J \cdot g}{2 \cdot V} \cdot y \cdot dy$$

$$v = -\frac{J \cdot g}{2 \cdot V} \cdot \frac{y^2}{2} + C$$

procki od  
kwadratu  
promienia

Wyznaczamy C

$$v = -\frac{J \cdot g}{2 \cdot V} \cdot \frac{y^2}{2} + C$$

Wyznaczamy C, dla  $y=r \rightarrow v=0$

$$0 = -\frac{J \cdot g}{2 \cdot V} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

$$C = \frac{J \cdot g}{2 \cdot V} \cdot \frac{r^2}{2}$$

$$v = \frac{J \cdot g}{4 \cdot V} \cdot (r^2 - y^2)$$

spadek hydrauliczny

$$J = \frac{H_{STRAT 1-2}}{l_{1-2}}$$

$$J = \frac{V}{S}$$

$$J = \frac{V}{S}$$

$$\rho = \rho \cdot g \cdot h$$

$$h = \frac{\rho}{\rho \cdot g}$$

$$\bar{v}^2 = \bar{v} \cdot \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{\bar{v} \cdot d^2}{4}$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot d$$

$$\dot{m} = A \cdot \rho \cdot v$$

$$\dot{m} = \frac{\pi \cdot J \cdot g \cdot d^4 \cdot \rho}{128 \cdot V}$$

$$v_{max} = \frac{J \cdot g}{4 \cdot V} \cdot r^2$$

$$v_{sr} = \frac{J \cdot g \cdot d}{32 \cdot V}$$