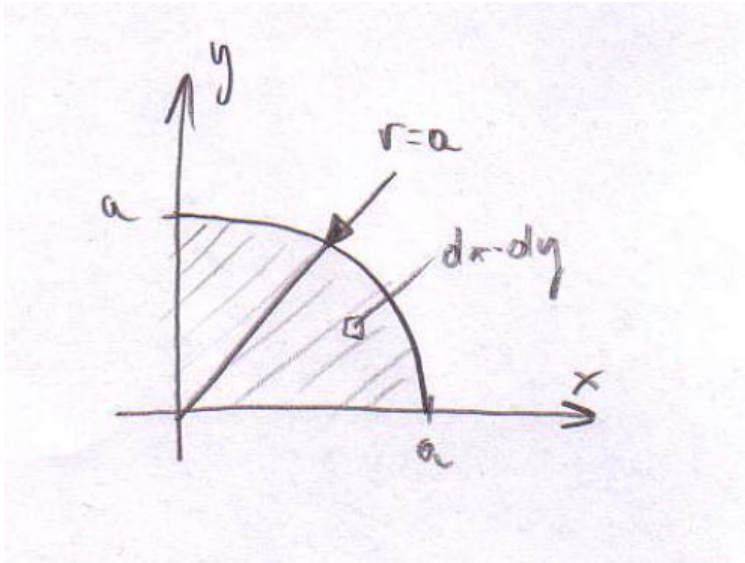


### Wyznaczyć środek ciężkości



Rysunek 1. Wyznaczanie środka ciężkości (środku masy) figury.

Rozważana figura jest ćwiartką koła. W przypadku koła wyznaczenie środka ciężkości byłoby proste. Z uwagi na symetrię współrzędne środka ciężkości  $x_c = y_c$ . Ćwiartka koła posiad promień  $r = a$ .

Współrzędna  $x_c$  środka ciężkości figury:

$$x_c = y_c$$

Współrzędna  $y_c$  środka ciężkości figury:

$$y_c = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$$

$d(x, y)$  – gęstość powierzchniowa

$$y_c = \frac{\iint y \cdot d(x, y) \cdot dx \cdot dy}{\iint d(x, y) \cdot dx \cdot dy}$$

$$y_c = \frac{d(x, y) \cdot \iint y \cdot dx \cdot dy}{d(x, y) \cdot \iint dx \cdot dy}$$

$$y_c = \frac{\iint y \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$$

Pole powierzchni ćwiartki koła jest dane równaniem.

$$A = \iint dx \cdot dy = \frac{\pi \cdot a^2}{4}$$

Całkę podwójną wyznaczoną zostanie z zastosowaniem przekształcenia do zmiennych w układzie biegunowym.

$$\iint y \cdot dx \cdot dy$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$0 < r < a$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{0;0}^{\frac{\pi}{2};a} r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot \int_0^a r^2 \cdot dr$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^a \right)$$

$$\frac{r^3}{3} \Big|_0^a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$\frac{r^3}{3} \Big|_0^a \cdot (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{a^3}{3}$$

$$y_c = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi \cdot a^2}{4}}$$

$$y_c = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{4}{\pi \cdot a^2}$$

$$y_c = \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}$$

$$x_c = \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}; y_c = \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}$$