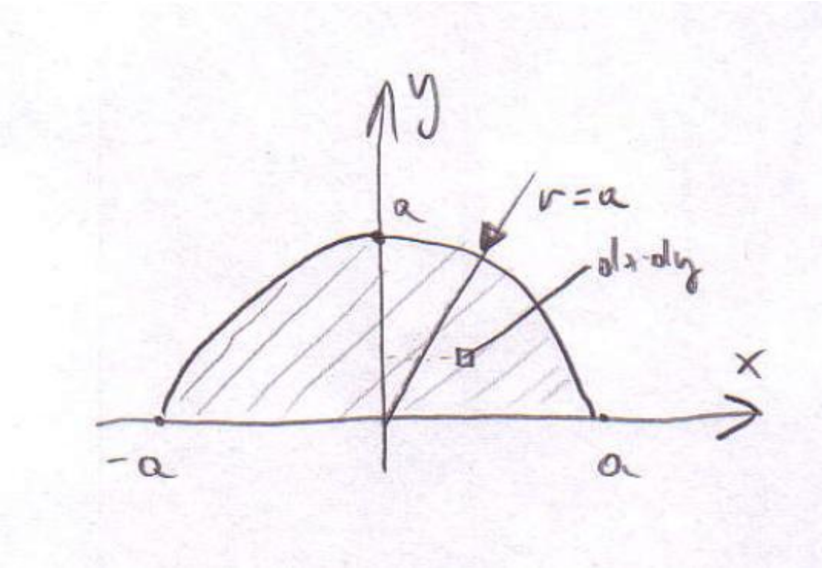
Wyznaczyć środek ciężkości



Rysunek 1. Wyznaczanie środka ciężkości (środka masy) figury.

Rozważana figura jest połową koła. W przypadku koła wyznaczenie środka ciężkości byłoby proste. Z uwagi na symetrię współrzędne środka ciężkości $x_C = 0$. Połowa koła posiada promień $r = a$.

Współrzędna x_c środka ciężkości figury:

$$x_C = 0$$

Współrzędna y_c środka ciężkości figury:

$$y_C = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_C = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$$

$$d(x, y) - \ gęstość\, powierzchniowa$$

$$y_C = \frac{\iint y \cdot d(x, y) \cdot dx \cdot dy}{\iint d(x, y) \cdot dx \cdot dy}$$

$$y_C = \frac{d(x, y) \cdot \iint y \cdot dx \cdot dy}{d(x, y) \cdot \iint dx \cdot dy}$$

$$y_C = \frac{\iint y \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$$

$$A = \iint dx \cdot dy = \frac{\pi \cdot a^2}{2}$$

Całkę podwójna wyznaczona zostanie z zastosowaniem przekształcenia do zmiennych w układzie biegunowym

$$\iint y \cdot dx \cdot dy$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$0 < r < a$$

$$0 < \varphi < \pi$$

$$\iint_{0;0}^{\pi;a} r \cdot \sin\varphi \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot \int_0^{a} r^2 \cdot dr$$

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot \left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^a\right)$$

$$\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^a \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi$$

$$\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^a \cdot (-\cos\varphi)|_0^{\pi}$$

$$\left(\frac{a^3}{3} - \left(\frac{0^3}{3}\right)\right) \cdot \big(-\cos\pi - (-\cos 0)\big)$$

$$\frac{a^3}{3} \cdot \big(1 - (-1)\big)$$

$$\frac{a^3}{3} \cdot 2 = \frac{2 \cdot a^3}{3}$$

$$y_C = \frac{\frac{2 \cdot a^3}{3}}{\frac{\pi \cdot a^2}{2}}$$

$$y_C = \frac{2 \cdot a^3}{3} \cdot \frac{2}{\pi \cdot a^2}$$

$$y_C = \frac{4 \cdot a}{3 \cdot \pi}$$