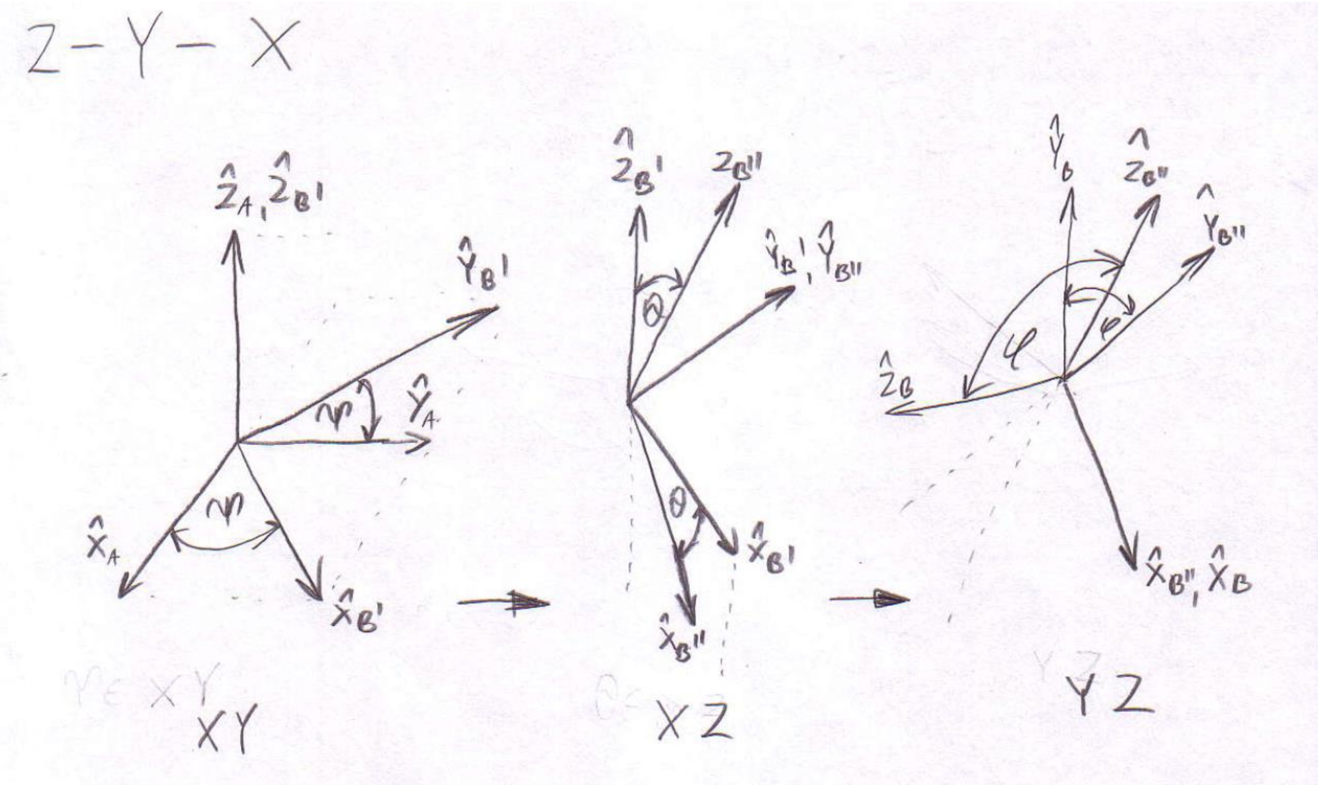
http://www.mbmaster.pl/robotyka-projekty-i-zadania.html

Robotyka - kąty Eulera

Kąty Eulera opisują rotację pomiędzy układami współrzędnych. W rozważanym tutaj przykładzie kolejne rotacje pomiędzy układem współrzędnych $\{A\}$ (układ początkowy), a układem współrzędnych $\{B\}$ (układ wyjściowy), odbędą się kolejno wokół osi $Z - Y - X$. Oznacza to że najpierw układ A zostanie obrócony wokół osi Z_A o kąt ψ, obrót osi X_A i Y_A będzie miał miejsce w płaszczyźnie $X_A Y_A$, wynikiem pierwszej rotacji będzie powstanie układu $\{B'\}$. Kolejną rotacją będzie rotacja wokół osi $Y_{B'}$, o kąt θ, osie $X_{B'}$ i $Z_{B'}$ zostaną obrócone w płaszczyźnie $X_{B'}Z_{B'}$, wynikiem drugiej rotacji będzie powstanie układu $\{B''\}$. Ostatnią rotacją będzie rotacja wokół osi $X_{B''}$, o kąt φ, osie $Y_{B''}$ i $Z_{B''}$ zostaną obrócone w płaszczyźnie $Y_{B''}Z_{B''}$. Wynikiem ostatniej rotacji będzie powstanie układu współrzędnych B.



Rysunek 1. Kolejne rotacje pomiędzy układami współrzędnych $\{\boldsymbol{A}\} \rightarrow \{\boldsymbol{B'}\} \rightarrow \{\boldsymbol{B''}\} \rightarrow \{\boldsymbol{B}\}$.

Ogólna postać macierzy opisującej rotację z układu $\{i\}$ do układu $\{i-1\}$ jest postaci.

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \overline{X}_i \circ \overline{X}_{i-1} & \overline{Y}_i \circ \overline{X}_{i-1} & \overline{Z}_i \circ \overline{X}_{i-1} \\ \overline{X}_i \circ \overline{Y}_{i-1} & \overline{Y}_i \circ \overline{Y}_{i-1} & \overline{Z}_i \circ \overline{Y}_{i-1} \\ \overline{X}_i \circ \overline{Z}_{i-1} & \overline{Y}_i \circ \overline{Z}_{i-1} & \overline{Z}_i \circ \overline{Z}_{i-1} \end{bmatrix} $$

W układzie $\{B\}$ zdefiniowany jest wektor ${}^{B}\boldsymbol{P}$ o znanych współrzędnych. Aby znaleźć współrzędne tego wektora w układzie konieczne będzie wyznaczenie macierzy rotacji z układu współrzędnych $\{B\}$ do układu współrzędnych $\{A\}$. Ponieważ pomiędzy układami $\{B\}$ i $\{A\}$ były trzy rotacje, macierz rotacji ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$ będzie iloczynem trzech macierzy rotacji pomiędzy układami pośrednimi.

$${}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B'}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B'}_{B''}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B''}_{B}\boldsymbol{R}$$

$${}^{A}_{B'}\boldsymbol{R} - \ rotacja\ pomiędzy\ układami\ \{A\}\ i\ \{B'\}, obrót\ wokół\ osi\ Z\ o\ kąt\ \psi$$

$${}^{B'}_{B''}\boldsymbol{R} - \ rotacja\ pomiędzy\ układami\ \{B'\}\ i\ \{B''\}, obrót\ wokół\ osi\ Y\ o\ kąt\ \theta$$

$${}^{B''}_{B}\boldsymbol{R} - \ rotacja\ pomiędzy\ układami\ \{B''\}\ i\ \{B\}, obrót\ wokół\ osi\ X\ o\ kąt\ \varphi$$

Współrzędne wektora ${}^{B}\boldsymbol{P}$ w układzie $\{A\}$ są dane zależnością

$${}^{A}\boldsymbol{P} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B}\boldsymbol{P}$$

$${}^{A}\boldsymbol{P} = {}^{A}_{B'}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B'}_{B''}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B''}_{B}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B}\boldsymbol{P}$$