

ROBOTYKA

Odwrotne zadanie kinematyki
- projekt

<http://www.mbmaster.pl>

Zawartość

1. Wstęp.....	3
1.1. Proste zadanie kinematyki – cel.....	3
1.2. Odwrotne zadanie kinematyki – cel.....	3
1.3. Analiza statyczna robota.....	3
2. Proste zadanie kinematyki.....	4
2.1. Projekt manipulatora.....	4
2.2. Notacja Denavita-Hartenberga.....	5
2.3. Obliczenia trajektorii w programie MATLAB.....	5
2.4. Kolejne pozycje manipulatora dla zmian zmiennych konfiguracyjnych.....	12
3. Odwrotne zadanie kinematyki.....	19
3.1. Ogólna postać macierzy transformacji.....	19
3.2. Macierze transformacji kolejnych układów.....	19
3.3. Obliczanie trajektorii w programie MATLAB.....	24
4. Analiza statyczna manipulatora.....	28

1. Wstęp.

Przedstawiony tutaj projekt z robotyki jest kompletnym rozwiązaniem odwrotnego zadania kinematyki. Przedmiotem projektu jest przykładowy manipulator(robot). Aby była możliwość obliczenia odwrotnego zadania kinematyki konieczne jest rozwiązanie prostego zadania kinematyki robota zgodnie z notacją Denavita-Hartenberga. Dodatkowo poza rozwiązaniem prostym zadaniem kinematyki oraz odwrotnym zadaniem kinematyki wykreślone są trajektorie ruchu manipulatora. Obliczenie trajektorii zostało wykonane w programie MATLAB. W projekcie jest kompletny kod źródłowy za pomocą którego można wykonać obliczenia a następnie wykreślić wyniki symulacji.

1.1. Proste zadanie kinematyki – cel.

Proste zadanie kinematyki można w skrócie opisać jako przypadek gdy znane są kąty i przesunięcia kolejnych członów manipulatora a w wyniku uzyskać chcemy współrzędne ostatniego układu współrzędnych w układzie bazowym.

Dane: θ_i, d_i

Szukane: X_0, Y_0, Z_0

1.2. Odwrotne zadanie kinematyki – cel.

W odwrotnym zadaniu kinematyki danymi wejściowymi jest pozycja jaką chcemy aby uzyskać ostatni układ współrzędnych w układzie bazowym. Znając pozycję zadaną ostatniego układu współrzędnych jako wynik chcemy uzyskać kąty ugięć lub długości przesunięć kolejnych napędów manipulatora.

Dane: X_0, Y_0, Z_0

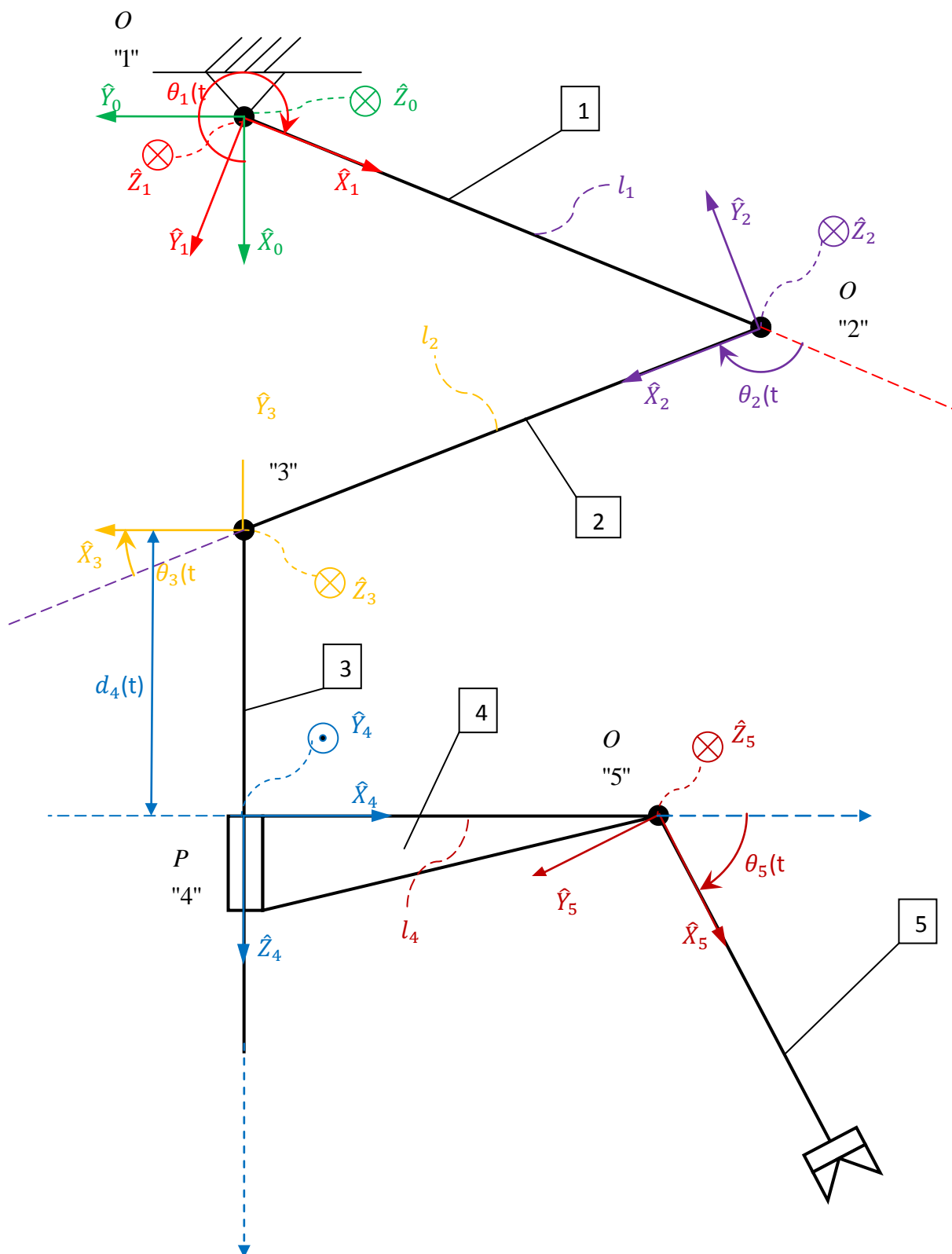
Szukane: θ_i, d_i

1.3 Analiza statyczna robota.

W projekcie tym przeprowadzona będzie analiza statyczna robota. Przeprowadzenie analizy statycznej robota da odpowiedź jakie siły lub momenty muszą być przyłożone do kolejnych napędów robota jak znajduje się on w stanie spoczynku. Ponadto w wyniku uzyskamy wzory na wartości sił i momentów jakie będzie musiała wytrzymać konstrukcja. Zaznaczam że jest to tylko analiza statyczna. W trakcie normalnej pracy robota dochodzą jeszcze obciążenia dynamiczne. Analiza obciążeń dynamicznych jest przedstawiona w innym projekcie, który traktuje tylko i wyłącznie o dynamice robota. Projekt dotyczący dynamiki robota można znaleźć na stronie <http://www.mbmaster.pl> w dziale dotyczącym robotyki.

2. Proste zadanie kinematyki.

2.1. Projekt manipulatora.



Rysunek 1. Model robota.

2.2. Notacja Denavita-Hartenberga.

Tabela 1. Notacja Denavita-Hartenberga tabelka.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0°	0	0	$\theta_1(t)$
2	0°	l_1	0	$\theta_2(t)$
3	0°	l_2	0	$\theta_3(t)$
4	90°	0	$d_4(t)$	180°
5	90°	l_4	0	$\theta_5(t)$

2.3. Obliczenia trajektorii w programie MATLAB.

```
function [T]=ma_trans(alfa,a,d,theta)
```

```
cA=cos(alfa);  
sA=sin(alfa);  
cQ=cos(theta);  
sQ=sin(theta);
```

```
T=[ cQ    -sQ    0    a    ;  
   sQ*cA  cQ*cA   -sA   -sA*d ;  
   sQ*sA  cQ*sA    cA    cA*d ;  
   0      0      0      1 ] ;
```

```
>> [T10]=ma_trans(0,0,0,0)
```

```
T10 =
```

```
1  0  0  0  
0  1  0  0  
0  0  1  0  
0  0  0  1
```

```
>> [T21]=ma_trans(0,8,0,0)
```

T21 =

```
1 0 0 8
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
```

```
>> [T32]=ma_trans(0,8,0,0)
```

T32 =

```
1 0 0 8
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
```

```
>> [T43]=ma_trans(pi/2,0,0,pi)
```

T43 =

```
-1.0000 -0.0000 0 0
0.0000 -0.0000 -1.0000 0
0.0000 -1.0000 0.0000 0
0 0 0 1.0000
```

```
>> [T54]=ma_trans(pi/2,7,0,0)
```

T54 =

```
1.0000 0 0 7.0000
0 0.0000 -1.0000 0
0 1.0000 0.0000 0
0 0 0 1.0000
```

```
>> P5=[4 0 0 0]'
```

```
P5 =
```

```
4  
0  
0  
0
```

```
>> P0=T10*T21*T32*T43*T54*P5
```

```
P0 =
```

```
-4.0000  
0.0000  
0.0000  
0
```

```
>> plot (T21, 'DisplayName','T21', 'YDataSource', 'T21'); figure(gcf)
```

```
>> P5=[4 0 0 1]'
```

```
P5 =
```

```
4  
0  
0  
1
```

```
>> P0=T10*T21*T32*T43*T54*P5
```

```
P0 =
```

```
5.0000  
0.0000  
0.0000  
1.0000
```

```
>>
```

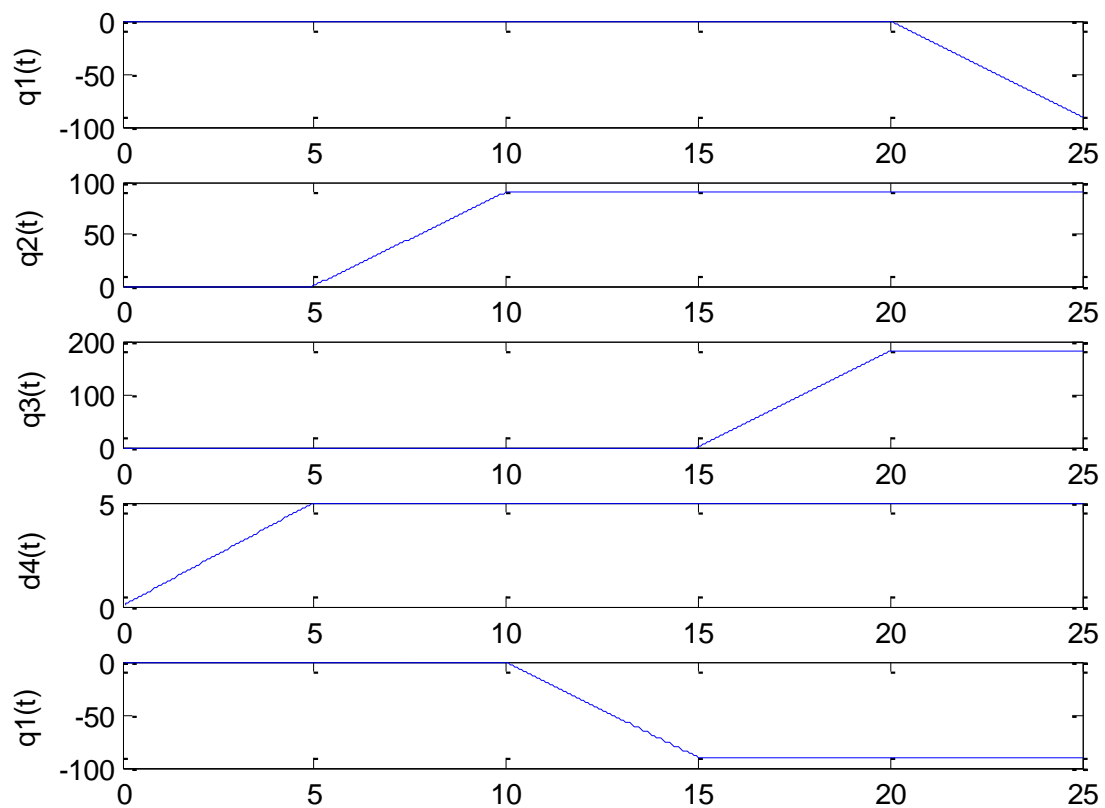
```
t=0:0.01:25;
```

```
[m n]=size(t);
```

```

for i=1:1:n
    if t(i)<5
        theta1(i)=0;
        theta2(i)=0;
        theta3(i)=0;
        d4(i)=1*t(i);
        theta5(i)=0;
    elseif t(i)<10
        theta1(i)=0;
        theta2(i)=pi/10*t(i)-pi/2;
        theta3(i)=0;
        d4(i)=5;
        theta5(i)=0;
    elseif t(i)<15
        theta1(i)=0;
        theta2(i)=pi/2;
        theta3(i)=0;
        d4(i)=5;
        theta5(i)=-pi/10*t(i)+pi;
    elseif t(i)<20
        theta1(i)=0;
        theta2(i)=pi/2;
        theta3(i)=pi/5*t(i)-3*pi;
        d4(i)=5;
        theta5(i)=-pi/2;
    else
        theta1(i)=-pi/10*t(i)+2*pi;
        theta2(i)=pi/2;
        theta3(i)=pi;
        d4(i)=5;
        theta5(i)=-pi/2;
    end% if
end%i
subplot(5,1,1),plot(t,theta1*180/pi)
subplot(5,1,2),plot(t,theta2*180/pi)
subplot(5,1,3),plot(t,theta3*180/pi)
subplot(5,1,4),plot(t,d4)
subplot(5,1,5),plot(t,theta5*180/pi);

```

Rysunek 2. Trajektorie zmian zmiennych konfiguracyjnych dla prostego zadania kinematyki.

Osie rzędnych przedstawionych powyżej wykresów opisane są innymi symbolami, odpowiadają one następującym zmiennym:

$$q_1(t) \rightarrow \theta_1(t)$$

$$q_2(t) \rightarrow \theta_2(t)$$

$$q_3(t) \rightarrow \theta_3(t)$$

$$d_4(t) \rightarrow d_4(t)$$

$$q_5(t) \rightarrow \theta_5(t)$$

%zadajemy parametry manipulatora

L1=8;

L2=8;

L3=0;

L4=5;

L5=4;

P5=[L5,0,0,1]'; **%pozycja końcówki w ostatnim układzie**

%powiązanie poszczególnych parametrów z czasem i wcześniejszymi wyliczeniami

for j = 1:n

 alfa = [0 0 0 pi/2 pi/2]; **%tabelka D-H – zmienne zależne od czasu (j) brane od wcześniejszych wyliczeń**

 a = [0 L1 L2 0 L4];

 d = [0 0 0 d4(j) 0];

 theta = [theta1(j) theta2(j) theta3(j) pi theta5(j)];

Tpom = eye(4); **%tworzenie końcowej macierzy**

for i = 1:5 **%wywołanie kolejnych wartości zadanych**

 sQ = sin(theta(i));

 cQ = cos(theta(i));

 sA = sin(alfa(i));

 cA = cos(alfa(i)); **%wyliczenia**

 T = [cQ -sQ 0 a(i) ;

 sQ*cA cQ*cA -sA -sA*d(i);

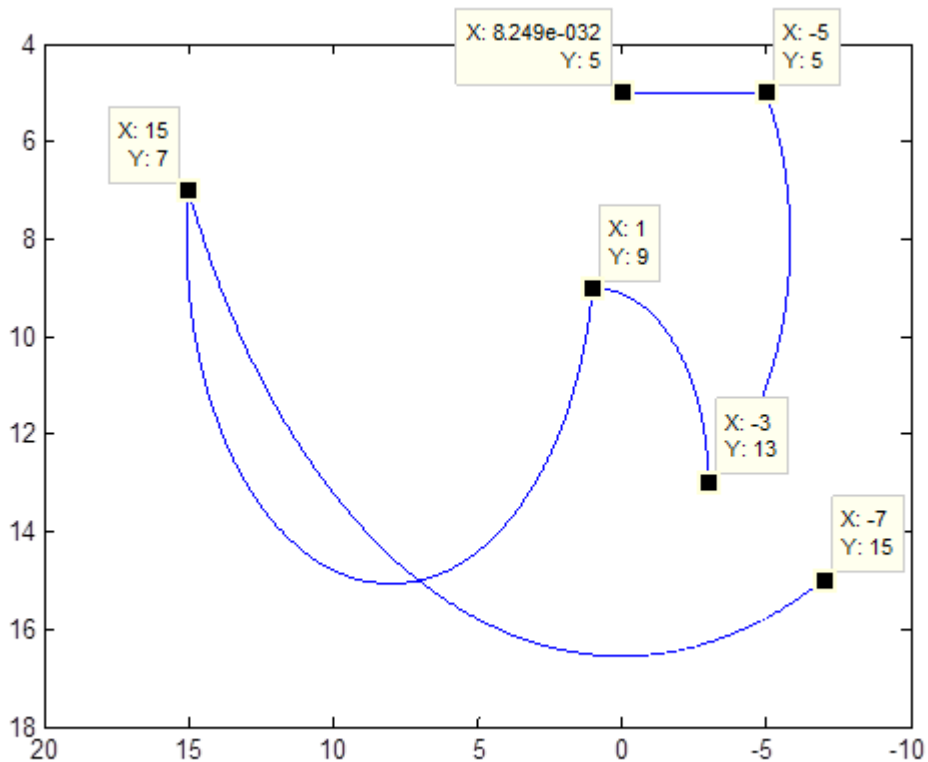
 sQ*sA cQ*sA cA cA*d(i);

 0 0 0 1];

```

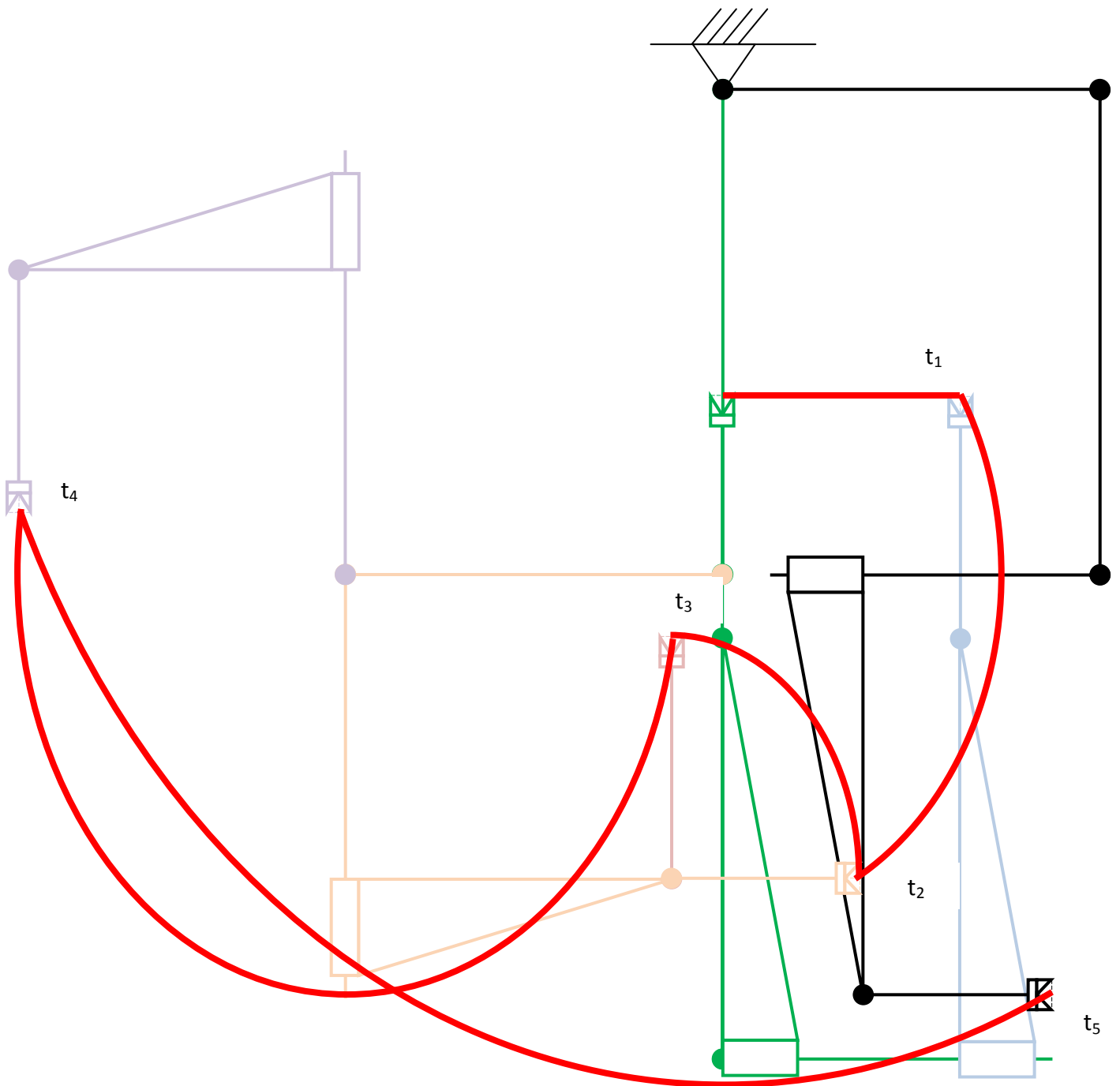
    Tpom = Tpom * T;
end % i
P0 = Tpom * P5;    %wylczenie końcowej pozycji
xx(j) = P0(1);
zz(j) = P0(2);
end % j
figure;
plot(zz,xx)    %no i w końcu rysujemy

```



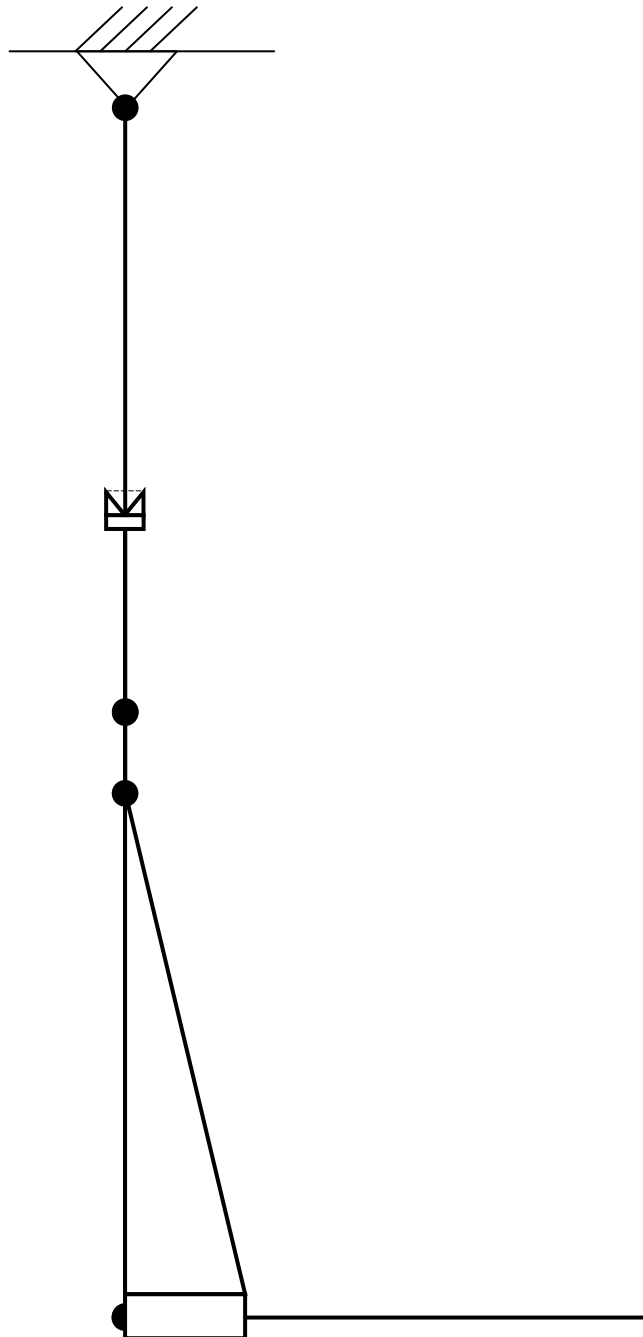
Rysunek 3. Ruch narzędzia manipulatora w płaszczyźnie XY dla zadanych zmiennych konfiguracyjnych.

2.4. Kolejne pozycje manipulatora dla zmian zmiennych konfiguracyjnych.



Rysunek 4. Rzut trajektorii i pozycji członów manipulatora w płaszczyźnie XY.

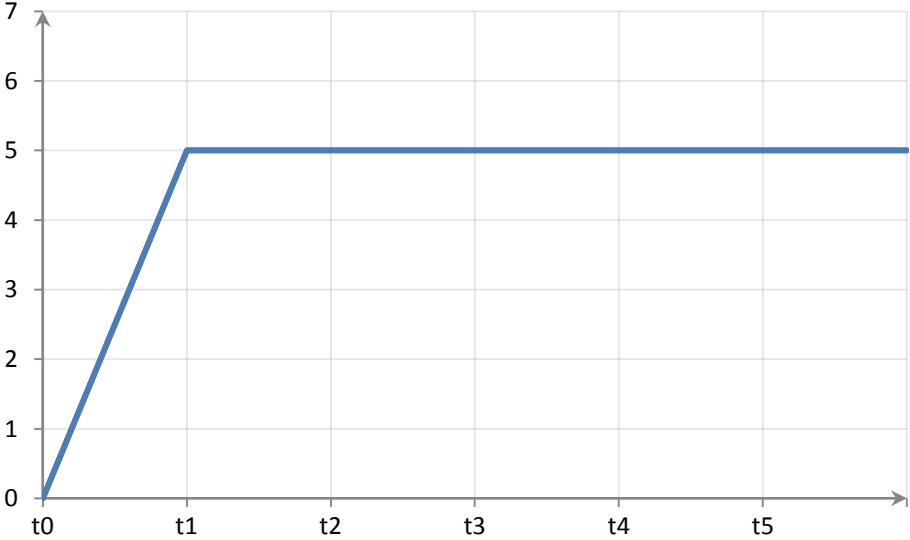
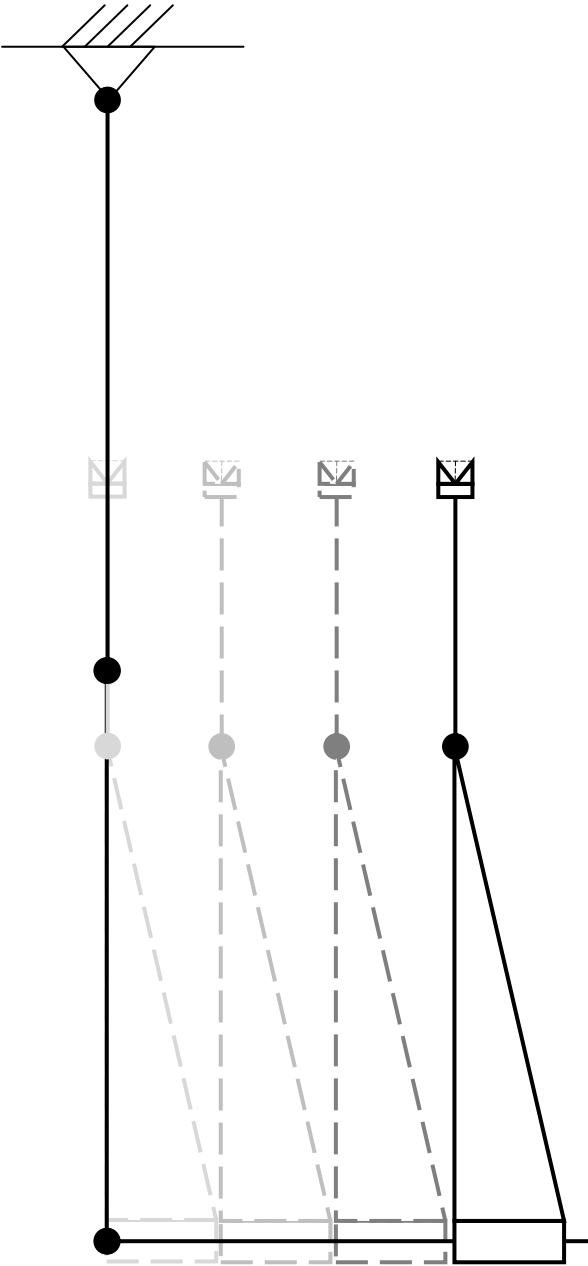
Ustawienie początkowe dla $t=0$.



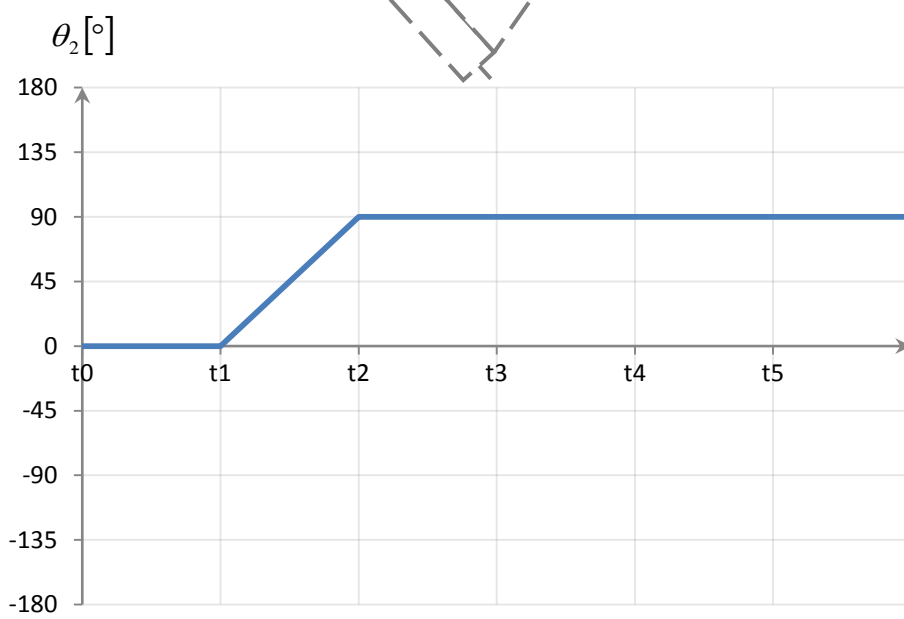
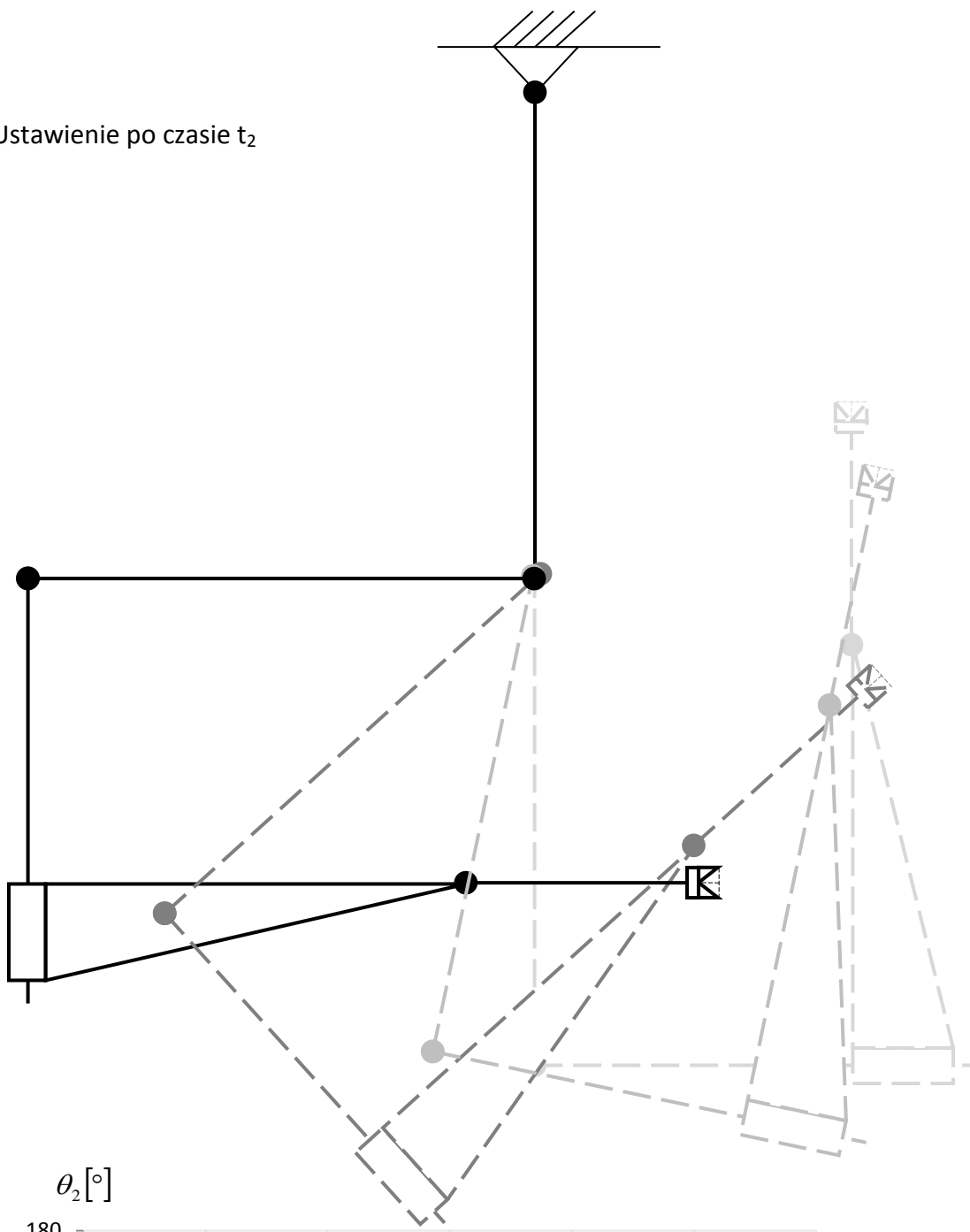
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0°	0	0	0°
2	0°	l_1	0	0°
3	0°	l_2	0	0°
4	90°	0	0	180°
5	90°	l_4	0	0°

Ustawienie po czasie t_1

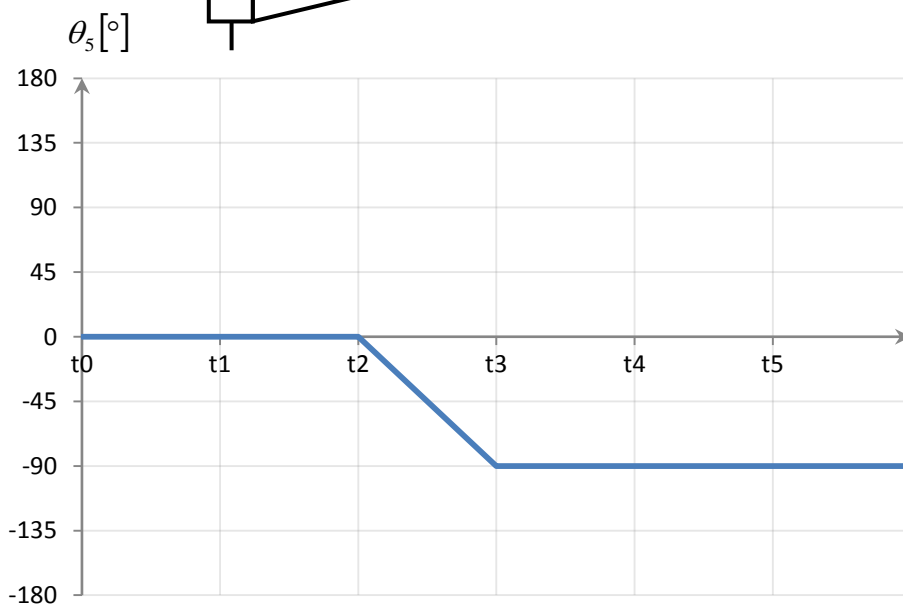
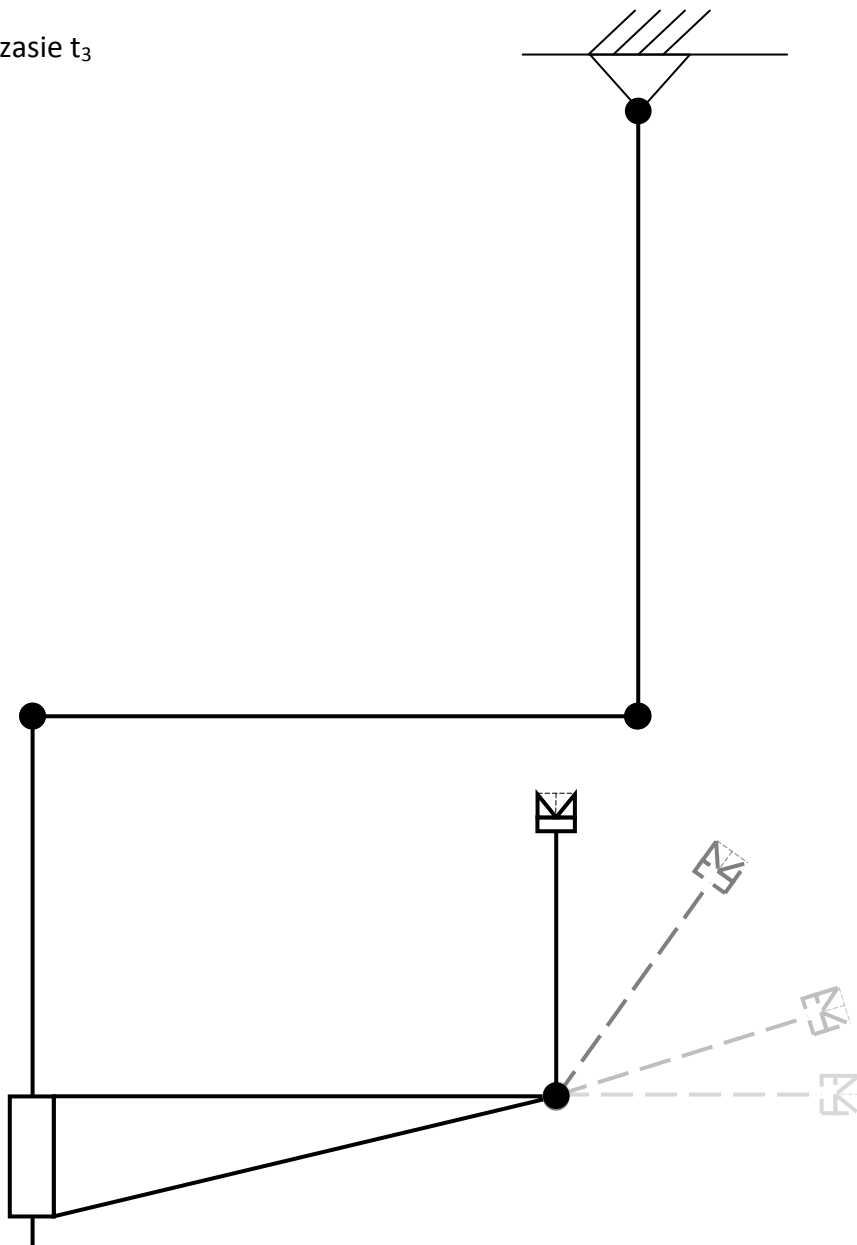
$d_4[m]$



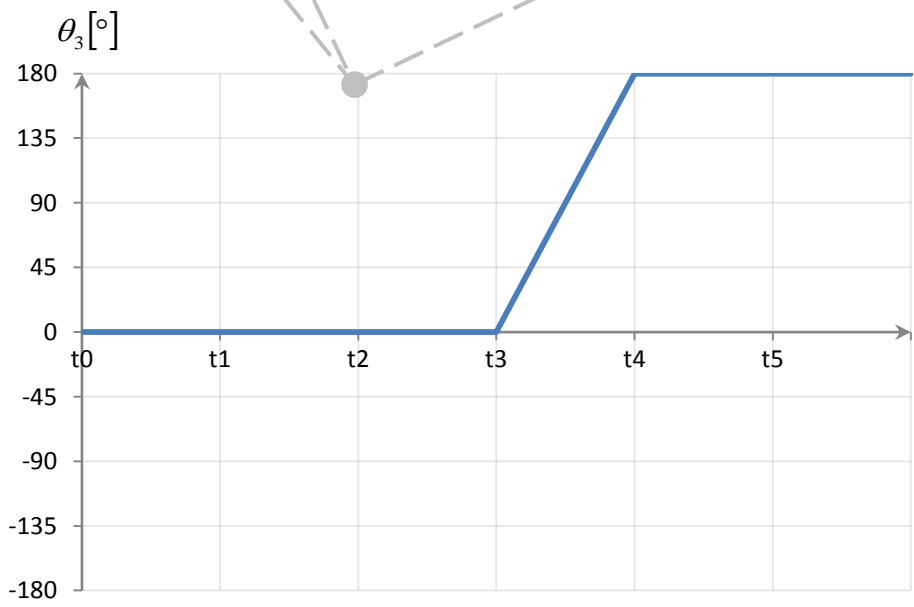
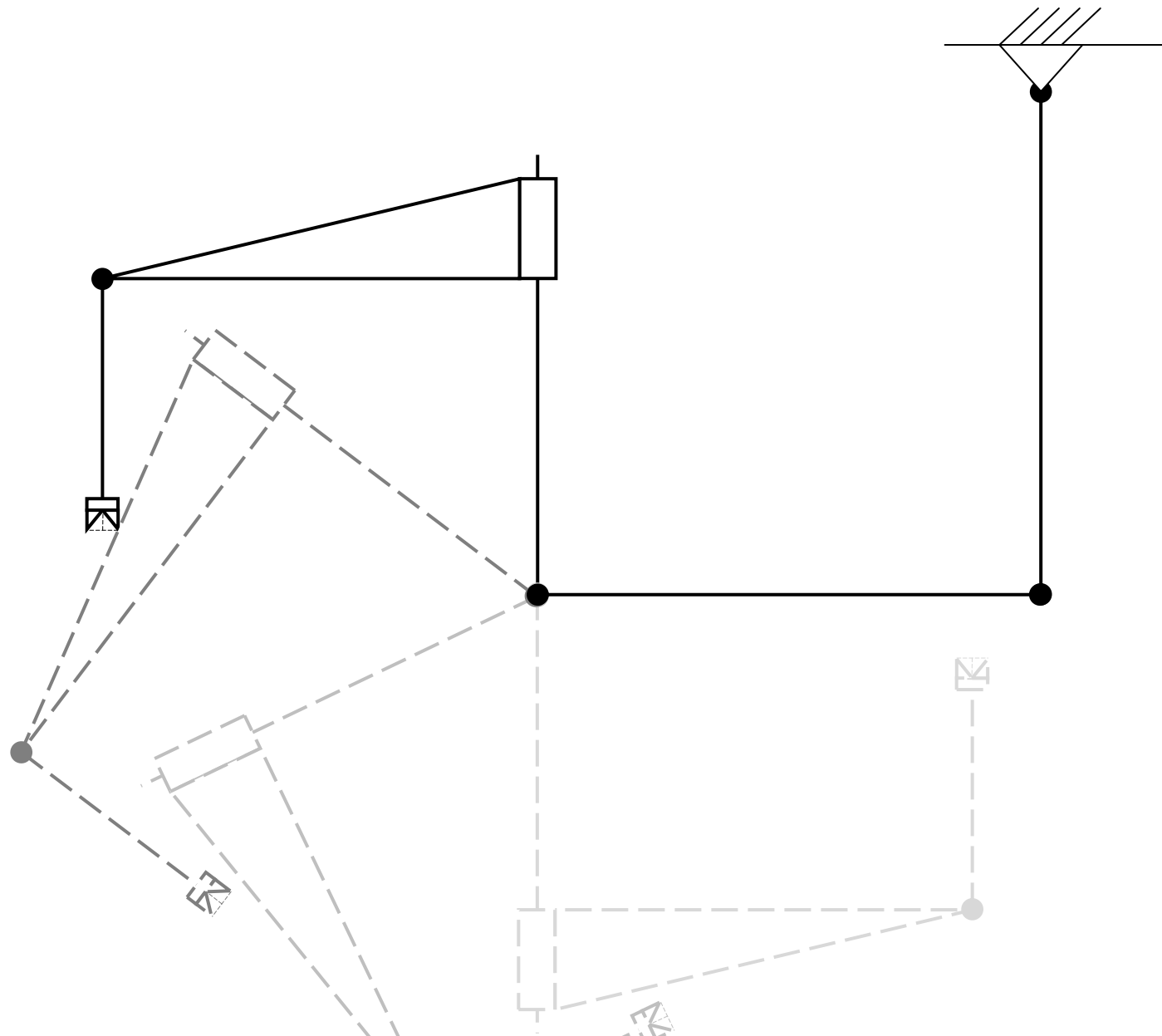
Ustawienie po czasie t_2

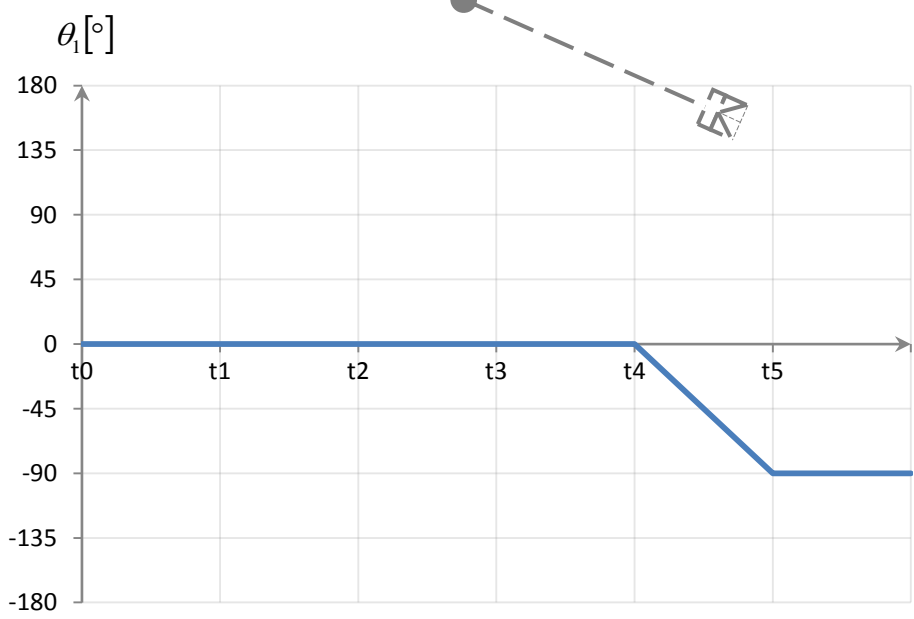
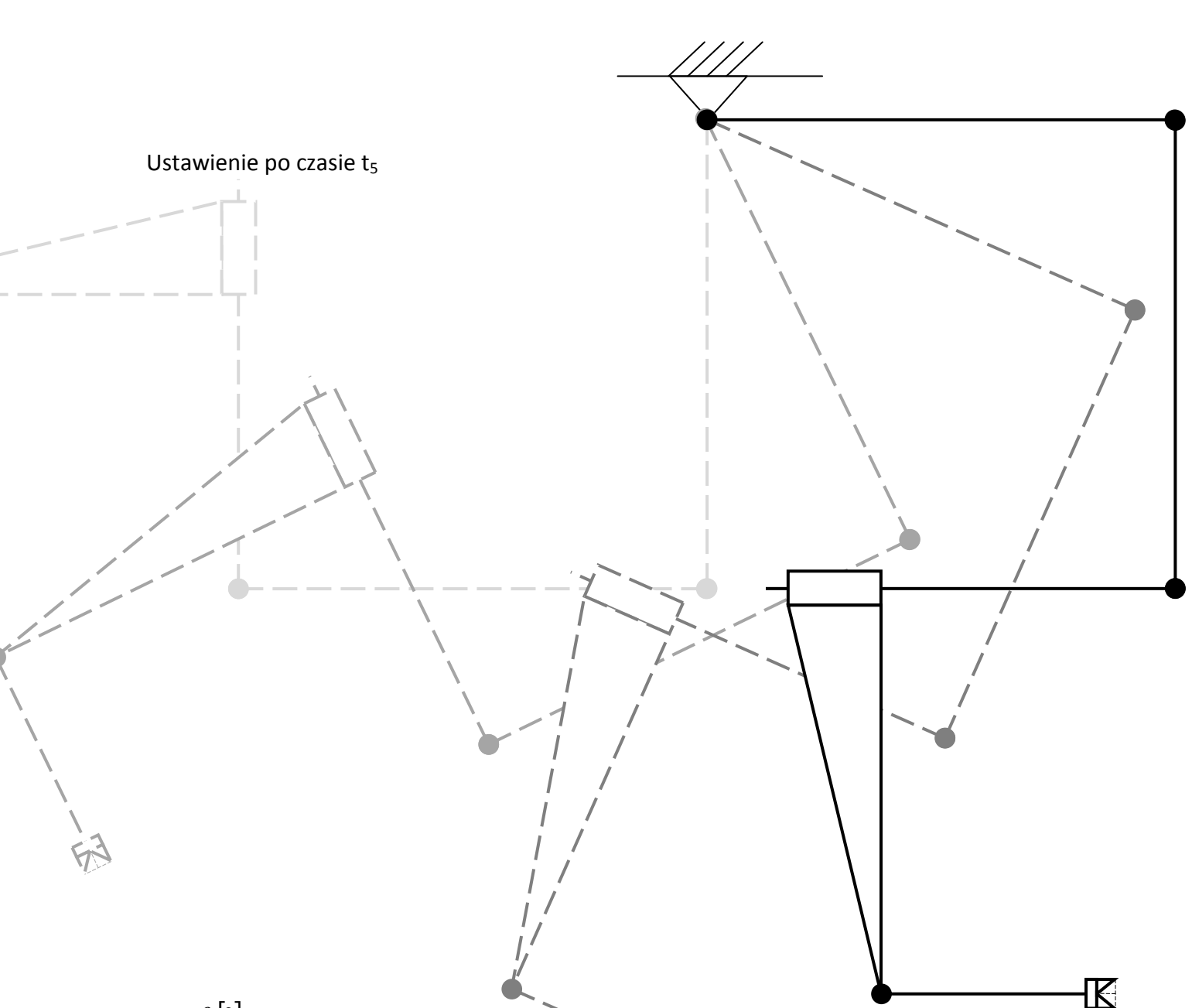


Ustawienie po czasie t_3



Ustawienie po czasie t_4





3. Odwrotne zadanie kinematyki.

W opracowaniu tym odwrotne zadanie kinematyki zostanie wyznaczone tylko do układu współrzędnych nr 3. Ograniczenie to spowodowane jest złożonością zadania. W oparciu o uzyskane w tym projekcie obliczenia czytelnik może w własnym zakresie wykonać odwrotne zadanie kinematyki uwzględniając wszystkie układy współrzędnych.

Celem odwrotnego zadania jest znaleźć w oparciu o zadaną pozycję kartezjańską względem układu bazowego, kąty ugięć lub przesunięcia kolejnych członów manipulatora. Jak wyżej wspomniano ostatnim układem będzie tutaj układ współrzędnych nr 3.

3.1. Ogólna postać macierzy transformacji.

Macierz ${}^{i-1}_i T$ opisuje transformację z układu „i” do układu „i-1”

$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i \cdot c\alpha_{i-1} & c\theta_i \cdot c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} \cdot d_i \\ s\theta_i \cdot s\alpha_{i-1} & c\theta_i \cdot s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} \cdot d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W macierzy przyjęto skrócone zapisy funkcji trygonometrycznych

$$s\theta_i \rightarrow \sin\theta_i \text{ oraz } c\theta_i \rightarrow \cos\theta_i$$

3.2. Macierze transformacji kolejnych układów.

Macierz transformacji z układu współrzędnych „1” do „0”

$${}^0_1 T = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gdzie: $S1 = \sin\theta_1$, $C1 = \cos\theta_1$

Macierz transformacji z układu współrzędnych „2” do „1”

$${}^1_2 T = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & L1 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gdzie: $S2 = \sin\theta_2$, $C2 = \cos\theta_2$

Macierz transformacji z układu współrzędnych „3” do „2”

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & L2 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gdzie: $S3 = \sin\theta_3$, $C3 = \cos\theta_3$

Znając kolejne macierze transformacji można wyznaczyć macierz transformacji z układu współrzędnych nr „3” do układu współrzędnych nr „0”.

$${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T$$

Po kolejnych operacjach mnożenia macierzy otrzymamy:

$$\begin{aligned} {}^0_3T &= \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & L1 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & L2 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C2*C2-S1*S2 & -C1*S2-S1*C2 & 0 & C1*L1 \\ S1*C2+C1*S2 & -S1*S2+C1*C1 & 0 & S1*L1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & L2 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (C1*C2-S1*S2)*C3+(-C1*S2-S1*C2)*S3 & (C1*C2-S1*S2)*(-S3)+(-C1*S2-S1*C2)*C3 & 0 & (C1*C2-S1*S2)*L2+C1L1 \\ (S1*C2+C1*S2)*C3+(-S1*S2+C1*C2)*S3 & (S1*C2+C1*S2)*(-S3)+(-S1*S2+C1*C2)*C3 & 0 & (S1*C2+C1*S2)*L2+S1L1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Otrzymana macierz w zapisie symbolicznym opisuje złożenie rotacji i przesunięcia układu współrzędnych nr „3” względem układu współrzędnych nr „0”

$${}^0_3T_D = \begin{bmatrix} {}^0_3R & P_{3ORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gdzie:

0_3R – macierz rotacji z układu „3” względem „0”

P_{3ORG} – wektor przesunięcia punktu [0,0,0] układu „3” w układzie „0”

W modelu manipulatora będącego przedmiotem tego opracowania ruch odbywa się w dwóch wymiarach.

Macierz 0_3T_D w przypadku ogólnym dla ruchu w dwóch wymiarach wygląda następująco:

$${}^0_3T_D = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & X_0 \\ s\phi & c\phi & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz 0_3T_D nazywana jest też macierzą zadaną.

Aby możliwe było wyrażenie kątów lub przesunięć kolejnych członów manipulatora w funkcjach współrzędnych kartezjańskich względem układu bazowego porównać trzeba macierz 0_3T_D z otrzymaną wcześniej macierzą 0_3T .

Poprzez porównanie rozumiemy porównanie indeksów tych macierzy a następnie przyrównaniem ich do siebie. W efekcie otrzymujemy następujący układ równań:

$${}^0_3T_D = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & X_0 \\ S\phi & C\phi & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_3T \begin{cases} x_0 = (C1 * C2 - S1 * S2) * L2 + C1 * L1 \rightarrow X_0 = C12 * L2 + C1 * L1 \\ Y_0 = (S1 * C2 + C1 * S2) * L2 + S1 * L1 \rightarrow Y_0 = S12 * L2 + S1 * L1 \\ C\phi = (C1 * C2 - S1 * S2) * C3 + (-C1 * S2 - S1 * C2) * S3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = (c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2) \cdot L2 + c1 \cdot L1 \\ Y_0 = (s1 \cdot c2 + c1 \cdot s2) \cdot L2 + s1 \cdot L1 \\ c\phi = (c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2) \cdot c3 + (-c1 \cdot s2 - s1 \cdot c2) \cdot s3 \end{cases}$$

Po skorzystaniu z trygonometrycznych wzorów redukcyjnych dwa pierwsze równania uproszczą się, w wyniku otrzymamy:

$$\begin{cases} X_0 = c12 \cdot L2 + c1 \cdot L1 \\ Y_0 = s12 \cdot L2 + s1 \cdot L1 \\ c\phi = (c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2) \cdot c3 + (-c1 \cdot s2 - s1 \cdot c2) \cdot s3 \end{cases}$$

Gdzie:

$$s12 = \sin(\theta_1 - \theta_2), c12 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Następnie zmienimy zapis równań na X_0 i Y_0 na następujący:

$$\begin{cases} X_0 - c1 \cdot L1 = c12 \cdot L2 \\ Y_0 - s1 \cdot L1 = s12 \cdot L2 \end{cases}$$

Podnosimy teraz powyższe równania do kwadratu i dodajemy stronami:

$$\begin{cases} (X_0 - c1 \cdot L1)^2 = (c12 \cdot L2)^2 \\ (Y_0 - s1 \cdot L1)^2 = (s12 \cdot L2)^2 \end{cases}$$

$$(X_0 - c_1 \cdot L_1)^2 + (Y_0 - s_1 \cdot L_1)^2 = (c_1 L_2)^2 + (s_1 L_2)^2$$

$$(X_0 - c_1 \cdot L_1)^2 + (Y_0 - s_1 \cdot L_1)^2 = (c_1^2 + s_1^2) \cdot L_2^2$$

Wymnażamy teraz kolejne wyrazy w równaniach:

$$X_0^2 - 2 \cdot X_0 \cdot L_1 \cdot c_1 + c_1^2 \cdot L_1^2 + Y_0^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot L_1 \cdot s_1 + s_1^2 \cdot L_1^2 = L_2^2$$

$$X_0^2 - 2 \cdot X_0 \cdot L_1 \cdot c_1 + Y_0^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot L_1 \cdot s_1 + (c_1^2 + s_1^2) \cdot L_1^2 = L_2^2$$

$$X_0^2 + Y_0^2 = 2 \cdot L_1 \cdot (X_0 \cdot c_1 + Y_0 \cdot s_1) + L_2^2 - L_1^2$$

$$\frac{X_0^2 + Y_0^2 - L_2^2 + L_1^2}{2 \cdot L_1} = X_0 \cdot c_1 + Y_0 \cdot s_1$$

Skorzystamy z zależności:

$$c = a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta$$

Zastosujemy podstawienia:

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}; \quad \cos\theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}; \quad \sin\theta = \frac{2 \cdot u}{1 + u^2}$$

Po uwzględnieniu podstawień można pierwsze równanie zapisać:

$$a \cdot (1 - u^2) + 2 \cdot b \cdot u = c \cdot (1 + u^2)$$

$$(a + c) \cdot u^2 - 2 \cdot b \cdot u + (c - a) = 0$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c}$$

$$\theta = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c} \right)$$

Wobec tego:

$$c = a \cdot \cos\theta_1 + b \cdot \sin\theta_1 \leftrightarrow \frac{X_0^2 + Y_0^2 - L_2^2 + L_1^2}{2 \cdot L_1} = X_0 \cdot c_1 + Y_0 \cdot s_1$$

Gdzie:

$$c = \frac{X_0^2 + Y_0^2 - L_2^2 + L_1^2}{2 \cdot L_1}$$

$$a = X_0$$

$$b = Y_0$$

Po wstawieniu do wzoru ogólnego otrzymujemy:

$$\theta_1 = 2 \cdot \arctag \left(\frac{Y_0 \pm \sqrt{Y_0^2 - X_0^2 - \left(\frac{X_0^2 + Y_0^2 - L2^2 + L1^2}{2 \cdot L1} \right)^2}}{X_0 + \frac{X_0^2 + Y_0^2 - L2^2 + L1^2}{2 \cdot L1}} \right)$$

Analogicznie postępujemy z pozostałymi zmiennymi:

$$Y_0 = (s1 \cdot c2 + c1 \cdot s2) \cdot L2 + s1 \cdot L1$$

$$\frac{Y_0 - s1 \cdot L1}{L2} = s1 \cdot c2 + c1 \cdot s2$$

$$\theta_2 = 2 \cdot \arctag \left(\frac{c1 \pm \sqrt{c1^2 - s1^2 - \left(\frac{Y_0 - s1 \cdot L1}{L2} \right)^2}}{s1 + \frac{Y_0 - s1 \cdot L1}{L2}} \right)$$

$$c\emptyset = (c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2) \cdot c3 + (-c1 \cdot s2 - s1 \cdot c2) \cdot s3$$

$$\theta_3 = 2 \cdot \arctag \left(\frac{-c1 \cdot s2 - s1 \cdot c2 \pm \sqrt{(-c1 \cdot s2 - s1 \cdot c2)^2 - (c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2)^2 - c\emptyset^2}}{c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2 + c\emptyset} \right)$$

Na tym etapie znamy już zależności zmiennych konfiguracyjnych w funkcji zmiennych kartezjańskich. Konieczne jest teraz wyznaczenie dziedzin funkcji.

Bez kłopotu możemy stwierdzić, że na pewno wartości długości ramion muszą być większe od zero.

$$L1 > 0; L2 > 0; L4 > 0$$

Oczywiście nie jest to koniec wyznaczania dziedziny. Dalsze wyznaczenie dziedziny pozostawiam czytelnikowi. Podczas wyznaczania dziedziny (przedziału wartości kątów) należy zwrócić uwagę na kolizje jakie mogą nastąpić przy różnych pozycjach manipulatora.

3.3. Obliczanie trajektorii w programie MATLAB.

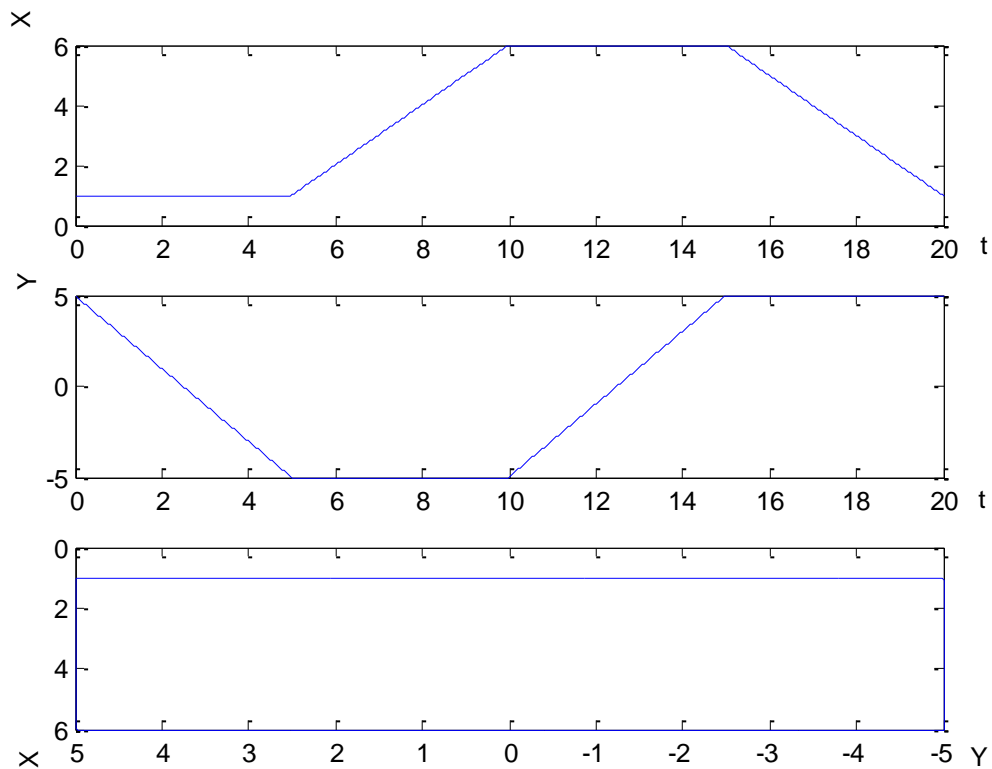
```
clear
clc
clear

L1=8;
L2=8;
t=0:0.01:20;
[m n]=size(t);

for i=1:1:n
    if t(i)<5
        x(i)=1;
        y(i)=-2*t(i)+5;
    elseif t(i)<10
        x(i)=t(i)-4;
        y(i)=-5;
    elseif t(i)<15
        x(i)=6;
        y(i)=2*t(i)-25;
    else
        x(i)=-t(i)+21;
        y(i)=5;
    end% if

end% i

figure(1)
subplot(3,1,1),plot(t,x)
subplot(3,1,2),plot(t,y)
subplot(3,1,3),plot(y,x)
```

Rysunek 5. Zadana trajektoria w zmiennych kartezjańskich.

```

fi=0;
t=0:0.01:20;% vector of time
[m n]=size(t);

for j=1:1:n

    th1(j)=2*atan( ( y(j)+sqrt( y(j)^2-x(j)^2- ( (x(j)^2+y(j)^2-L2^2+L1^2)/(2*L1) )^2 ) ) /
( x(j)+( (x(j)^2+y(j)^2-L2^2+L1^2)/(2*L1) ) ) );

    th2(j)=2*atan((cos(th1(j))+sqrt((cos(th1(j)))^2-(sin(th1(j)))^2-((y(j)-
sin(th1(j))*L2)/(L2))^2))/
(sin(th1(j))+((y(j)-sin(th1(j))*L1)/(L2))));

    th3(j)=2*atan( (-cos(th1(j))*sin(th2(j))-sin(th1(j))*cos(th2(j))+sqrt((-cos(th1(j))*sin(th2(j))-
sin(th1(j))*cos(th2(j)))^2-(cos(th1(j))*cos(th2(j))-sin(th1(j))*sin(th2(j)))^2-cos(fi)^2))/
(cos(th1(j))*cos(th2(j))-sin(th2(j))*sin(th2(j))+cos(fi) ) );

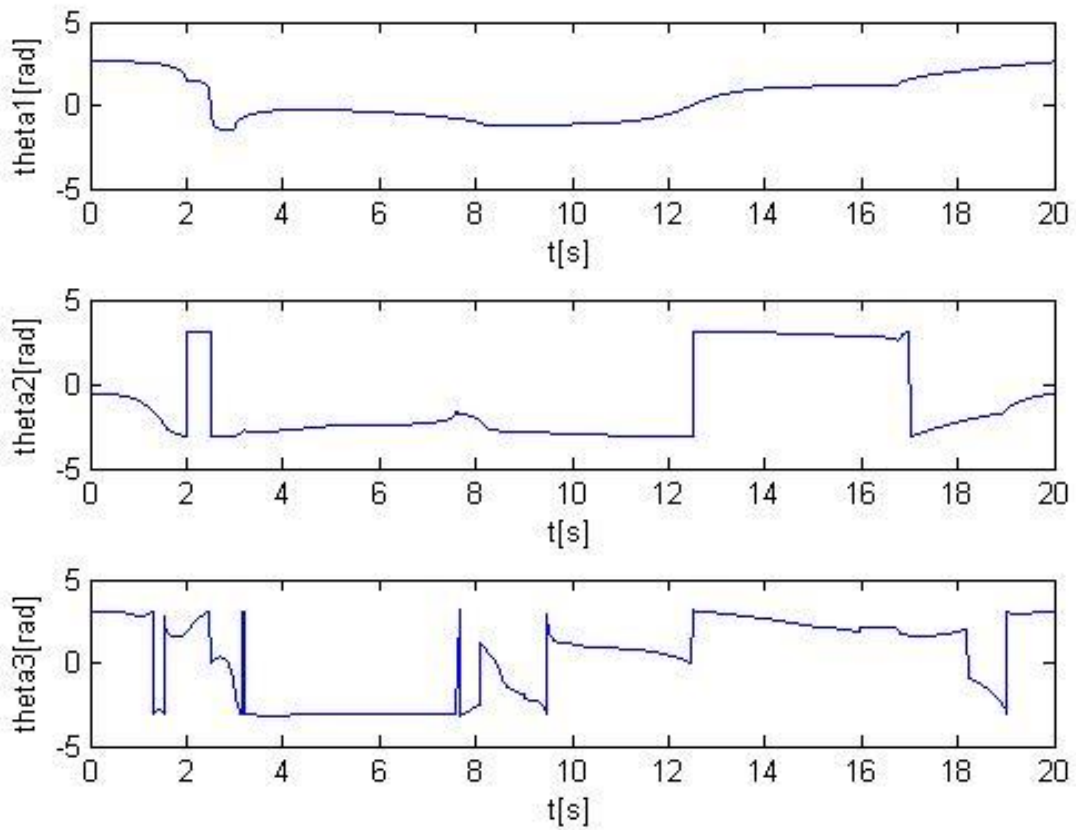
end % j

```

```

figure(2)
subplot(3,1,1),plot(t,th1)
xlabel('t[s]'); ylabel('theta1[rad]');
subplot(3,1,2),plot(t,th2)
xlabel('t[s]'); ylabel('theta2[rad]');
subplot(3,1,3),plot(t,th3)
xlabel('t[s]'); ylabel('theta3[rad]');

```



Rysunek 6. Kąty ugięcia ramion dla zadanego ruchu w układzie bazowym.

```

P3 = [5 0 0 1]';
for k=1:1:n

c1=cos(th1(k));
s1=sin(th1(k));
c2=cos(th2(k));
s2=sin(th2(k));
c3=cos(th3(k));
s3=sin(th3(k));

T= [ (c1*c2-s1*s2)*c3+(-c1*s2-s1*c2)*s3  (c1*c2-s1*s2)*(-s3)+(-c1*s2-s1*c2)*c3  0  (c1*c2-
s1*s2)*L2+c1*L1 ;
      (s1*c2+c1*s2)*c3+(-s1*s2+c1*c2)*s3  (s1*c2+c1*s2)*(-s3)+(-s1*s2+c1*c2)*c3  0
(s1*c2+c1*s2)*L2+s1*L1 ;
      0  0  1  0 ;
      0  0  0  1 ];

P0 = T*P3;

xx(k)=P0(1);
yy(k)=P0(3);

end %k
plot(yy,xx)

```

4. Analiza statyczna manipulatora.

Celem analizy statycznej jest uzyskanie informacji o siłach jakie będą działać na jego konstrukcję oraz napędy podczas spoczynku robota.

Siła działająca w narzędziu robota przedstawiona w postaci ogólnej:

$${}^6\mathbf{f}_6 = \begin{bmatrix} f_{6x} \\ f_{6y} \\ f_{6z} \end{bmatrix}$$

Przejdźcie z siłą do układu $i = 5$

Ponieważ „wirtualny” układ nr 6 jest identyczny jak układ nr 5 więc

$${}^5\mathbf{f}_5 = {}^5\mathbf{R} \cdot {}^6\mathbf{f}_6 = {}^6\mathbf{f}_6$$

Obliczenie momentu w układzie $i = 5$

$${}^5\mathbf{n}_5 = {}^5\mathbf{R} \cdot {}^6\mathbf{n}_6 + {}^5\mathbf{P}_6 \times {}^5\mathbf{f}_5$$

Ponieważ ${}^6\mathbf{n}_6 = 0$

$${}^5\mathbf{n}_5 = \begin{bmatrix} {}^5x_5^1 & {}^5y_5^1 & {}^5z_5^1 \\ L5 & 0 & 0 \\ f_{5x} & f_{5y} & f_{5z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L5 \cdot f_{5z} \\ L5 \cdot f_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{5x} \\ n_{5y} \\ n_{5z} \end{bmatrix}$$

Gdzie ${}^5x_5^1$ ${}^5y_5^1$ ${}^5z_5^1$ to wersory jednostkowe układu $i = 5$

Wyznaczenie wartości momentu napędowego dla układu $i = 5$

$$l_5 = {}^5\mathbf{n}_5^T \cdot {}^5\mathbf{z}_5^1 = [0 \quad n_{5y} \quad n_{5z}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^5z_5^1 \end{bmatrix} = n_{5z}$$

Wyznaczanie obciążeń w układzie $i = 4$

Obciążenia wyznaczone w układzie $i = 5$ będą występowały również w układzie $i = 4$, wobec tego będą uwzględnione w wzorach ogólnych.

Rotacja pomiędzy układami $i = 5$ oraz $i = 4$ jest opisana następującą macierzą rotacji:

$${}^4_5\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s5 & c5 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4\mathbf{f}_4 = {}^4_5\mathbf{R} \cdot {}^5\mathbf{f}_5 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s5 & c5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{6x} \\ f_{6y} \\ f_{6z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c5 \cdot f_{6x} - s5 \cdot f_{6y} \\ -f_{6z} \\ s5 \cdot f_{6x} + c5 \cdot f_{6y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ f_{4z} \end{bmatrix}$$

$${}^4\mathbf{n}_4 = {}^4_5\mathbf{R} \cdot {}^5\mathbf{n}_5 + {}^4\mathbf{P}_5 \times {}^4\mathbf{f}_4$$

$${}^4\mathbf{n}_4 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s5 & c5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{5x} \\ n_{5y} \\ n_{5z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^4x_4^1 & {}^4y_4^1 & {}^4z_4^1 \\ L4 & 0 & 0 \\ f_{4x} & f_{4y} & f_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s5 \cdot n_{5y} \\ -n_{5z} - L4 \cdot f_{4z} \\ c5 \cdot n_{5y} + L4 \cdot f_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{4x} \\ n_{4y} \\ n_{4z} \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie wartości siły napędowej dla układu $i = 4$

$$l_4 = {}^4\mathbf{f}_4^T \cdot {}^4\mathbf{z}_4^1 = [f_{4x} \quad f_{4y} \quad f_{4z}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^4z_4^1 \end{bmatrix} = f_{4z}$$

Wyznaczanie obciążeń w układzie $i = 3$

Obciążenia wyznaczone w układzie $i = 4$ będą występowały również w układzie $i = 3$, wobec tego będą uwzględnione w wzorach ogólnych.

Rotacja pomiędzy układami $i = 4$ oraz $i = 3$ jest opisana następującą macierzą rotacji:

$${}^3_4\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{f}_3 = {}^3_4\mathbf{R} \cdot {}^4\mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ f_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{4x} \\ -f_{4z} \\ f_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3z} \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{n}_3 = {}^3_4\mathbf{R} \cdot {}^4\mathbf{n}_4 + {}^3\mathbf{P}_4 \times {}^3\mathbf{f}_3$$

$${}^3\mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{4x} \\ n_{4y} \\ n_{4z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^3x_3^1 & {}^3y_3^1 & {}^3z_3^1 \\ 0 & -d4 & 0 \\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{4x} - d4 \cdot f_{3z} \\ -n_{4z} \\ n_{4y} + d4 \cdot f_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{3x} \\ n_{3y} \\ n_{3z} \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie wartości momentu napędowego dla układu $i = 3$

$$l_3 = {}^3\mathbf{n}_3^T \cdot {}^3\mathbf{z}_3^1 = [n_{3x} \quad n_{3y} \quad n_{3z}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^3z_3^1 \end{bmatrix} = n_{3z}$$

Wyznaczanie obciążeń w układzie $i = 2$

Obciążenia wyznaczone w układzie $i = 3$ będą występowały również w układzie $i = 2$, wobec tego będą uwzględnione w wzorach ogólnych.

Rotacja pomiędzy układami $i = 3$ oraz $i = 2$ jest opisana następującą macierzą rotacji:

$${}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 \\ s3 & c3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^2_3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 \\ s3 & c3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c3 \cdot f_{3x} - s3 \cdot f_{3y} \\ s3 \cdot f_{3x} + c3 \cdot f_{3y} \\ f_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = {}^2_3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{n}_3 + {}^2\mathbf{P}_3 \times {}^2\mathbf{f}_2$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 \\ s3 & c3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{3x} \\ n_{3y} \\ n_{3z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^2x_2^1 & {}^2y_2^1 & {}^2z_2^1 \\ L2 & 0 & 0 \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c3 \cdot n_{3x} - s3 \cdot n_{3y} \\ s3 \cdot n_{3x} + c3 \cdot n_{3y} - L2 \cdot f_{2z} \\ n_{3z} + L2 \cdot f_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie wartości siły napędowej dla układu $i = 2$

$$l_2 = {}^2\mathbf{n}_2^T \cdot {}^2\mathbf{z}_2^1 = [n_{2x} \quad n_{2y} \quad n_{2z}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^2z_2^1 \end{bmatrix} = n_{2z}$$

Wyznaczanie obciążeń w układzie $i = 1$

Obciążenia wyznaczone w układzie $i = 2$ będą występowały również w układzie $i = 1$, wobec tego będą uwzględnione w wzorach ogólnych.

Rotacja pomiędzy układami $i = 2$ oraz $i = 1$ jest opisana następującą macierzą rotacji:

$${}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 \\ s2 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{f}_1 = {}^1_2\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 \\ s2 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c2 \cdot f_{2x} - s2 \cdot f_{2y} \\ s2 \cdot f_{2x} + c2 \cdot f_{2y} \\ f_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{n}_1 = {}^1_2\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{n}_2 + {}^1\mathbf{P}_2 \times {}^1\mathbf{f}_1$$

$${}^1\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 \\ s2 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1x_1^1 & {}^1y_1^1 & {}^1z_1^1 \\ L1 & 0 & 0 \\ f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c2 \cdot n_{2x} - s2 \cdot n_{2y} \\ s2 \cdot n_{2x} + c2 \cdot n_{2y} - L1 \cdot f_{1z} \\ n_{2z} + L1 \cdot f_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie wartości momentu napędowego dla układu $i = 1$

$$l_1 = {}^1\mathbf{n}_1^T \cdot {}^1\mathbf{z}_1^1 = [n_{1x} \quad n_{1y} \quad n_{1z}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^1z_1^1 \end{bmatrix} = n_{1z}$$