Idem (łacina) - ten sam

~~w wyniku~~ Identyfikacją nazywamy postępowanie w oparciu o wyniki badań eksperymentalnych adekwatnego do danego procesu rzeczywistego modelu matematycznego, wyznaczenie wartości współczynników tego modelu oraz sprawdzenie zgodności modelu z procesem rzeczywistym.

Eksperyment czynny pozwala na ~~wyznaczenie~~ identyfikację obiektu poprzez ingerencję w jego normalne warunki pracy i wprowadzenie na wejście odpowiednio dobranych sygnałów. Wykonujemy go w warunkach laboratoryjnych bez obecności zakłóceń, jego celem jest uzyskanie jak największej ilości informacji przy jak najmniejszej liczbie prób.

Eksperyment bierny - wykonywany jest podczas normalnej eksploatacji obiektu, stanowi to jego zaletę. Wadą jest długi czas zbierania informacji o obiekcie, fragmentaryczność zebranych informacji oraz występowanie błędów identyfikacji w związku z występującymi zakłóceniami. Trzeba określić przedziały $u \in [u_{min}, u_{max}]$ i $y \in [y_{min}, y_{max}]$. Na podstawie danych tabelarycznych tworzy się ch-kę w postaci graficznej.

Postać analityczną ch-ki statycznej określa najczęściej w oparciu o ch-kę w postaci graficznej lub tablicowej za pomocą metod:

- interpolacja paraboliczna Lagrangea
- aproksymacja metodą różnic podwójnych
- aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów błędów

Interpolacja paraboliczna metodą Lagrangea.

Celem jest znalezienie takiej funkcji $\hat{y}(u)$ ~~która~~ która przyjmuje te same wartości co funkcja $y(u)$, czyli $\hat{y}(u) = y(u)$. $\hat{y}(u)$ - funkcja ~~interpolacyjna~~ interpolacyjna

Interpolacja paraboliczna: $\hat{y}(u) = a_0 + a_1 \cdot u^1 + a_2 \cdot u^2 + \ldots + a_n \cdot u^n$.

Wielomian interpolacyjny określa się najczęściej przy pomocy wzoru ~~interpolacyjnego~~ interpolacyjnego Lagrangea.

$$\hat{y}(u) = L_0(u) \cdot y_0 + L_1(u) \cdot y_1 + \ldots + L_n(u) \cdot y_n \qquad L_i(u) = \frac{(u-u_0) \cdot \ldots \cdot (u-u_{i-1})(u-u_{i+1})(u-u_n)}{(u_i-u_0) \cdot \ldots \cdot (u_i-u_{i-1})(u_i-u_{i+1}) \ldots (u_i-u_n)}$$

$$i = 0, \ldots, n$$

$y_i = f(u_i)$

Do wyznaczenia współczynników trzeba dokładnie tyle samo punktów co współczynników.

Przykład

$$\hat{y}(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 \cdot u^3 \qquad \hat{y}(u) = \frac{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)(u_0-u_3)} \cdot y_0 + \frac{(u-u_0)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)(u_1-u_3)} \cdot y_1 + \ldots L_n(u) \cdot y_n$$

Aproksymacja funkcji dwóch zmiennych metodą różnic podwójnych

Obiekt o dwóch wejściach (sygnał wejściowy i zakłócenie)

$\hat{y}(u, z) \qquad \hat{y}(u_k, z_l) = y_{k,l} \qquad k = 0, \ldots, n \quad l = 0, \ldots, m$

z \ u	u_0	u_1	...	u_n
z_0	$y_{0,0}$	$y_{1,0}$	...	$y_{n,0}$
z_1	$y_{0,1}$	$y_{1,1}$	...	$y_{n,1}$
...	...	...	...	...
z_m	$y_{0,m}$	$y_{1,m}$	...	$y_{n,m}$

~~$\hat{y}(u,z) = y_{0,0} + \frac{1}{1!} [u \cdot \Delta^{1+0} \ldots \Delta^{1+1} y_{0,0}$~~

$$\hat{y}(u,z) = y_{0,0} + \frac{1}{1!} \cdot [u \cdot \Delta^{1+0} y_{0,0} + z \cdot \Delta^{0+1} y_{0,0}] +$$
$$+ \frac{1}{2!} \cdot [u(u-1) \cdot \Delta^{2+0} y_{0,0} - 2 \cdot u \cdot z \cdot \Delta^{1+1} y_{0,0} + z \cdot (z-1) \cdot \Delta^{0+2} y_{0,0}] +$$
$$+ \frac{1}{3!} \cdot [u(u-1)(u-2) \cdot \Delta^{3+0} y_{0,0} + 3 \cdot u \cdot z \cdot (u-1) \cdot \Delta^{2+1} y_{0,0} + 3 \cdot u \cdot z \cdot (z-1) \cdot \Delta^{1+2} y_{0,0} +$$
$$+ z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \Delta^{3+0} \cdot y_{0,0} + \ldots$$

Po zapisaniu wyników w tabeli dokonuje się transformacji liniowej sygnałów wejściowych tak aby kolejne ich wartości różniły się o jeden.

Różnice podwójne

$$\Delta^{p+q} y_{k,l} = \Delta^{(p-1)+q} y_{k+1,l} - \Delta^{(p-1)+q} y_{k,l}$$

indeks $p \to u$
indeks $q \to 2$

$$\Delta^{p+q} y_{k,l} = \Delta^{p+(q-1)} y_{k,l+1} - \Delta^{p+(q-1)} y_{k,l}$$

Różnice pierwszego rzędu

$$\Delta^{1+0} y_{0,0} = \Delta^{(1-1)+0} y_{0+1,0} - \Delta^{(1-1)+0} y_{0,0} = y_{1,0} - y_{0,0}$$

$$\Delta^{0+0} y_{k,l} = y_{k,l}$$

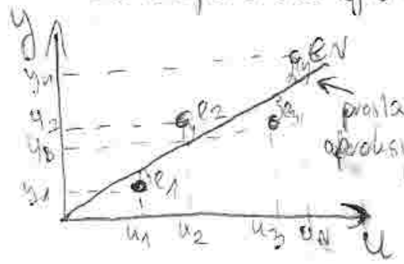
$$\Delta^{0+1} y_{0,0} = \Delta^{0+(1-1)} y_{0,0+1} - \Delta^{0+(1-1)} y_{0,0} = y_{0,1} - y_{0,0}$$

Różnice drugiego rzędu

$$\Delta^{2+0} y_{0,0} = \Delta^{1+0} y_{1,0} - \Delta^{1+0} y_{0,0} = [y_{2,0} - y_{1,0}] - [y_{1,0} - y_{0,0}]$$

Metoda różnic podwójnych jest dobra dla eksperymentu czynnego.

Metoda najmniejszych kwadratów błędów.



$e_1, e_2, \ldots, e_n$ - błędy aproksymacji $\qquad \hat{y} = b \cdot u$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \qquad \hat{y}_i = b \cdot u_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b \cdot u_i)^2$$

$$\frac{dQ}{db} = 0 \qquad \frac{dQ}{db} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - b \cdot u_i) \cdot u_i \right] = 0$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

Modyfikujemy postać funkcji aproksymacyjnej:

$\boxed{\hat{y} = b_0 + b_1 u}$, $\quad Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 u_i)^2 = 0$

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 u_i) = 0 \ \to b_0 \\ ② \ \dfrac{\partial Q}{\partial b_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - b_0 - b_1 u_i) \cdot u_i \right] = 0 \end{cases}$$

Metoda analizy regresji

Pozwala na wyznaczenie charakterystyki statycznej wielowymiarowych obiektów liniowych lub nieliniowych o wielu wejściach i jednym wyjściu, poddanych działaniu zakłóceń. Metoda ta bazuje na metodzie najmniejszej sumy kwadratów błędów ~~kwadratów błędów~~, różnica polega na tym, że w metodzie analizy regresji zostały określone zasady doboru postaci funkcji aproksymacyjnej.

Najczęściej stosowane funkcje aproksymacyjne:

1) liniowy wielomian 1-stopnia $\quad \hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot u_i \qquad$ r - liczba wejść

2) nieliniowy wielomian 1-stopnia $\quad \hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot \varphi_i(\bar{u}) \qquad$ $\varphi_i(\bar{u})$ - zadane liniowo niezależne funkcje r-wymiarowego argumentu $\bar{u}$.

3) wielomian 2-stopnia

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot u_i + \sum_{i,j=1}^{r} b_{ij} \cdot u_i \cdot u_j \qquad i < j$$

4) funkcja wykładnicza $\hat{y}=\sum_{i=1}^{r} b^{u_i}$ 5) funkcja potęgowa $y=\sum_{i=1}^{r} u_i^{\,b}$

Metody doboru postaci funkcji aproksymacyjnej:

1) metoda informacji początkowej o obiekcie
2) metoda punktowego wykresu rozrzutu
3) metoda znajomości funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(u,y)$.

Wykonano N pomiarów obiektu o r-wejściach.

Dla wielomianu 1-ego stopnia.

$$\hat{y}=b_0+b_1 u_1+b_2 u_2+\ldots+b_r u_r \qquad i=1\div N \qquad Q=\sum_{i=1}^{N} e_i^2=\min$$

$$\hat{y}_i=b_0+b_1 u_{i1}+b_2 u_{i2}+\ldots+b_r u_{ir} \qquad Q=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

$$Q=\sum_{i=1}^{N}(y_i-b_0-b_1 u_{i1}-b_2 u_{i2}+\ldots-b_r u_{ir})^2=\min$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0}=0 \quad \frac{\partial Q}{\partial b_0}=-2\cdot\sum_{i=1}^{N}(y_i-b_0+\ldots-b_r u_{ir})=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_r}=0 \quad \frac{\partial Q}{\partial b_r}=-2\sum_{i=1}^{N}(y_i-b_0+\ldots-b_r u_{ir})\,u_{ir}=0$$

liczba pomiarów, liczba wejść

$$\underline{N \geq r+1}$$

$$\begin{cases} b_0 N+b_1\sum u_{i1}+\ldots+b_r\sum u_{ir}=\sum y_i \\ \vdots \\ b_0 u_{ir} N+b_1\sum u_{i1}u_{ir}+\ldots+b_r\sum u_{ir}u_{ir}=\sum u_{ir}y_i \end{cases}$$

Zapis macierzowy

$$U=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_{i0} & u_{i1} & u_{i2} & \ldots & u_{ir} \end{array} \\ \begin{bmatrix} u_{10} & u_{11} & u_{12} & & u_{1r} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n0} & u_{n1} & u_{n2} & & u_{nr} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} i=1 \\ \\ \\ i=n \end{array}$$

$$\bar{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \hat{y}=\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}; \quad \bar{b}=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}=U\cdot\bar{b}$$

$$Q=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\hat{y}_i)^2=(\bar{y}-\hat{y})^T(\bar{y}-\hat{y})=(\bar{y}-U\cdot\bar{b})^T(\bar{y}-U\cdot\bar{b})=\bar{y}^T\bar{y}-\bar{y}^T U\bar{b}-\bar{b}^T U^T\bar{y}+$$

$$-\bar{b}^T U^T\bar{b}U=\bar{y}^T\bar{y}-2\bar{b}^T U^T\bar{y}+U^T U\bar{b}^2=\min$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{b}}=0 \quad \frac{\partial Q}{\partial \bar{b}}=-2\cdot U^T\bar{y}+2\cdot U^T U\bar{b}=0 \rightarrow \underline{\bar{b}=(U^T U)^{-1}U^T\bar{y}}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne

Model matematyczny trzeba zweryfikować.

$U^T U \rightarrow$ nieosobliwa

$\det(U^T U)\neq 0$

Metoda analizy czynnikowej (metoda planowania eksperymentu).

Eksperyment czynny polega na tym, że wielkości wejściowe identyfikowanego obiektu ($u_1\div u_r$) nie są dowolne lecz specjalnie (w N pomiarach) dobrane. W metodzie analizy czynnikowej postać modelu matematycznego dobiera się na tych samych zasadach co w metodzie analizy regresji. Model statyczny obiektu realizującego dany proces wyznacza się w pewnym obszarze sygnału wejściowego u_i w otoczeniu punktu środkowego eksperymentu u_{0i}

W tym celu poszczególnym sygnałom wejściowym nadaje się arbitralnie wybrane przyrosty Δu_i mierząc każdorazowo uzyskane wartości wyjścia obiektu y.

Dla modelu liniowego ~~nadaje się~~ do uzyskania współczynników, wartości sygnału wejściowego nadaje się na dwóch poziomach.

$$\left.\begin{array}{l} u_i = u_{0i} + \Delta u_i \\ u_i = u_{0i} - \Delta u_i \end{array}\right\} N = 2^{r} \begin{array}{l} \leftarrow \text{liczba wejść} \\ \uparrow \text{liczba pomiarów (doświadczeń)} \end{array}$$

Dla modelu matematycznego w postaci wielomianu 2-stopnia sygnały wejściowe przyjmują wartości na trzech poziomach.

$$\left.\begin{array}{l} u_i = u_{0i} + \Delta u_i \\ u_i = u_{0i} \\ u_i = u_{0i} - \Delta u_i \end{array}\right\} N = 3^{r} \begin{array}{l} \leftarrow \text{liczba wejść} \\ \uparrow \text{liczba doświadczeń} \end{array}$$

Standaryzacja zmiennych wejściowych

Metoda ta opiera się na dokonaniu transformacji wielkości wejściowych, aby były one w postaci zero-jedynkowej.

$$t_i = \frac{u_i - u_{0i}}{\Delta u_i} \qquad t_i \text{ – zmienna standaryzowana} \qquad u_i = u_{0i} + t_i \cdot \Delta u_i$$

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot u_i$$

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot (u_{0i} + t_i \cdot \Delta u_i) = a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot t_i \qquad a_0 = b_0 + \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot u_{0i}$$

$$a_i = b_i \cdot \Delta u_i$$

Planowanie dwupoziomowe

$$\left.\begin{array}{l} u_i = u_{0i} + \Delta u_i \\ u_i = u_{0i} - \Delta u_i \end{array}\right\} \begin{array}{l} t_i = \frac{\Delta u_i}{\Delta u_i} = 1 \\ t_i = \frac{-\Delta u_i}{\Delta u_i} = (-1) \end{array}$$

Planowanie trójpoziomowe

$$\left.\begin{array}{l} u_i = u_{0i} + \Delta u_i \\ u_i = u_{0i} \\ u_i = u_{0i} - \Delta u_i \end{array}\right\} \begin{array}{l} t_i = \frac{\Delta u_i}{\Delta u_i} = 1 \\ t_i = 0 \\ t_i = (-1) \end{array}$$

Zapis macierzowy

$$T = \begin{array}{c} t_{i0} \quad t_{i1} \; \dots \; t_{ir} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right]_{i=N} \end{array} \text{ – macierz zmiennych standaryzowanych} \qquad r \text{ – liczba wejść}$$

$$t_{10} = t_{20} = \dots = t_{N0} = 1$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} \qquad \underline{\bar{a} = (T^T \cdot T)^{-1} \cdot T^T \cdot \bar{y}} \text{ – wzór ogólny}$$

Dla szczególnego przypadku (model liniowy)

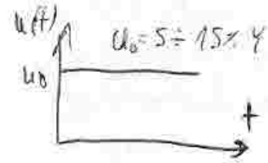
$(T^T \cdot T) = N \cdot I$ $\qquad$ $(T^T \cdot T)$ – macierz diagonalna

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \cdot T^T \cdot \bar{y}$$

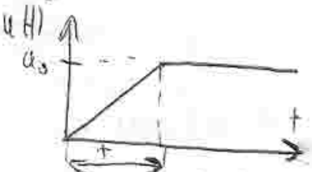
Identyfikacja właściwości dynamicznych obiektów na podstawie charakterystyk czasowych.

Metoda charakterystyk czasowych

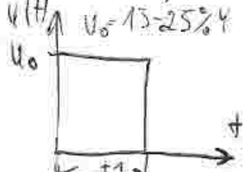
1. wyznaczenie charakterystyk czasowych.
2. określenie postaci modelu matematycznego.
3. określenie współczynników modelu matematycznego.



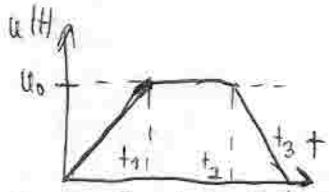
Rys. Wymuszenie skokowe.



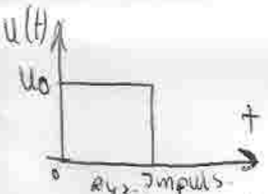
Rys. Wymuszenie trapezoidalne skokowe.

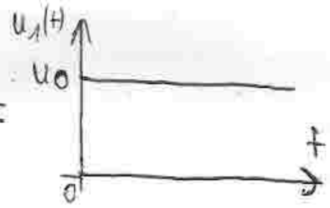


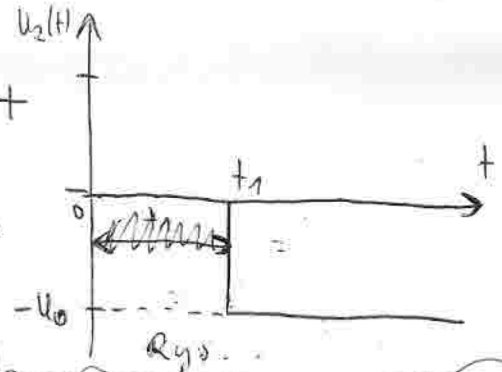
Rys. Sygnał impulsowy dla elementów P, PI, PID



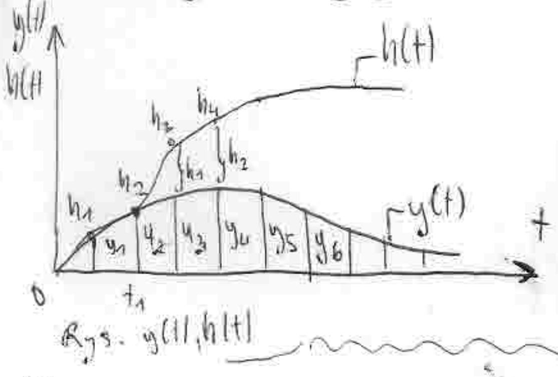
Rys. Impuls trapezoidalny skokowy dla elementów P, PI, PID



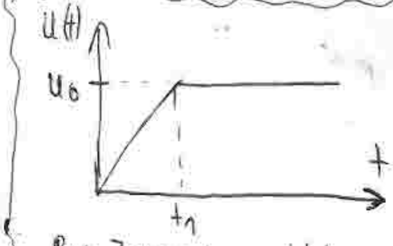




$$y(t)=h(t)-h(t-t_1)$$
$$h(t)=y(t)+h(t-t_1)$$

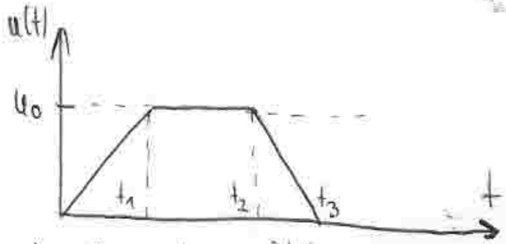


$h_1=y_1$
$h_2=y_2$
$h_3=y_3+h_1$
$h_4=y_4+h_2$
$h_5=y_5+h_3$



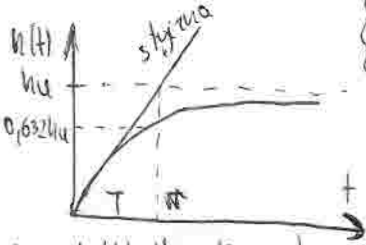
Rys. Impuls trapezoidalny.

$$y(t)=\frac{1}{t_1}\left[\int_0^{t}h(\tau)d\tau-\int_0^{t-t_1}h(\tau)d\tau\right]$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t_1}\left[h(t)-h(t-t_1)\right]$$
$$h(t)=t_1\cdot\frac{dy}{dt}+h(t-t_1)$$



Rys. Impuls trapezoidalny

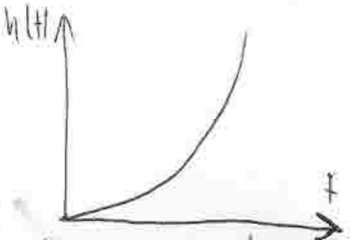
$$y(t)=\frac{1}{t_1}\left[\int_0^{t}h(\tau)d\tau-\int_0^{t-t_1}h(\tau)d\tau-\int_0^{t-t_1-t_2}h(\tau)d\tau+\int_0^{t-t_1-t_2-t_3}h(\tau)d\tau\right]$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t_1}\left[h(t)-h(t-t_1)-h(t-t_1-t_2)+h(t-t_1-t_2-t_3)\right]$$
$$h(t)=t_1\cdot\frac{dy}{dt}+h(t-t_1)+h(t-t_1-t_2)-h(t-t_1-t_2-t_3)$$



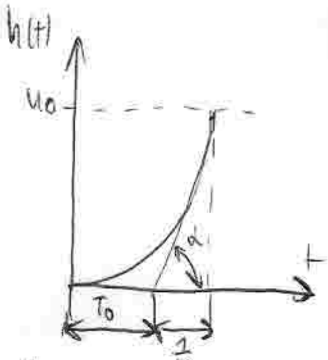
Rys. h(t) dla elementu inercyjnego.

$$h_u=h(t)\Big|_{t\to\infty}=\frac{1}{t_1}\int_0^{+\infty}y(t)\,dt$$

$$G(s)=\frac{k}{Ts+1}\qquad k=\frac{h_u}{u_0}$$ - statyczny współczynnik wzmocnienia

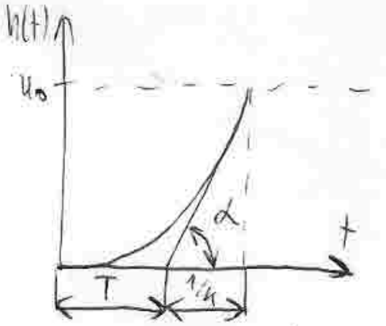


Rys. h(t) dla elementu całkującego.



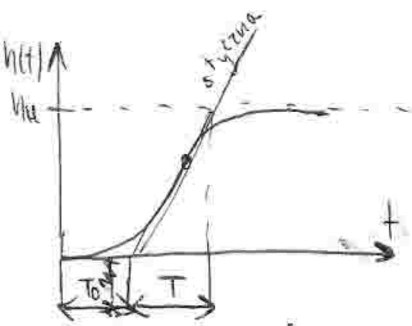
Rys. Element całkujący teoretyczny.

$$G(s)=\frac{k\cdot e^{-T_0\cdot s}}{s}$$



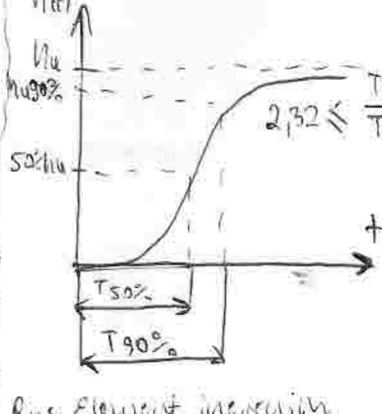
Rys. element całkujący inercyjny.

$$G(s)=\frac{k}{s\cdot(T\cdot s+1)}$$
$$k=\frac{dh(t)}{dt}\cdot\frac{1}{u_0}=\frac{tg\,\alpha}{u_0}$$



Rys. Element inercyjny z opóźnieniem.

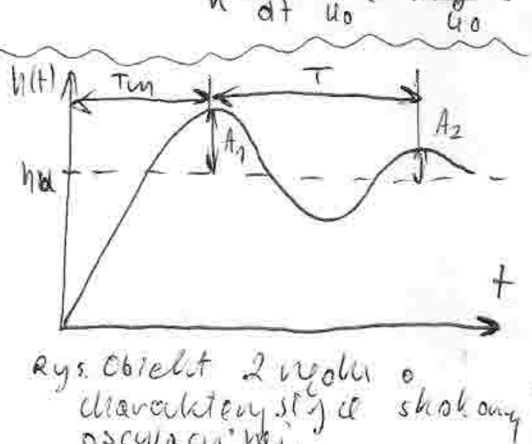
$$G(s)=\frac{k\cdot e^{-T\cdot s}}{T\cdot s+1}$$
$$k=\frac{h_u}{u_0}$$



$$2{,}32\leq\frac{T_{90\%}}{T_{50\%}}\leq 3{,}32$$

Rys. Element inercyjny 2 rzędu.

$$G(s)=\frac{k}{(T\cdot s+1)(T\cdot b\cdot s+1)}$$



Rys. Obiekt 2 rzędu o charakterystyce skokowej oscylacyjnej.

$$G(s)=\frac{k}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot s^2+\frac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot s+1}$$

ω_n - częstości drgań własnych